

令和 4 年 5 月 11 日現在

機関番号：15401
 研究種目：基盤研究(C) (一般)
 研究期間：2017～2021
 課題番号：17K05204
 研究課題名(和文)代数幾何学・数論幾何学におけるカンドルの研究

研究課題名(英文)Quandles in algebraic and arithmetic geometry

研究代表者

高橋 宣能 (Takahashi, Nobuyoshi)

広島大学・先進理工系科学研究科(理)・准教授

研究者番号：60301298

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：1. カンドルという代数構造の与えられた多様体(カンドル多様体)に対し、その上の加群を定義し、様々な例を与えた。また、カンドル多様体の中でも「正則s多様体」と呼ばれるものの場合に、加群の正則性を定義し、「無限小s多様体」と呼ばれる代数の正則な表現との対応を示した。さらに、Lie環の表現との対応についての見通しを立てた。
 2. 整数環にカンドルや多重共役カンドルを対応させる方法、また整数環の復元について成果があった。
 3. 対数的BPS不変量および対数的Gromov-Witten不変量に関し、局所BPS不変量との関係、接触する点に依存しないという予想、退化した曲線の寄与などについて研究した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

1. カンドルという代数系は、簡潔な公理により定義され、結び目理論などに応用を持つ興味深いものである。群の構造を持つ多様体であるLie群と同様、カンドル多様体にも奥深い理論があることが期待される。代数的構造の研究に特に有用であるのがその上の加群であり、今回の成果はその基礎をなすものと言える。
 2. 整数環に付随するカンドルの研究は、整数環と三次元多様体の類似に新しい視点を付け加えるものと思われる。
 3. 対数的BPS不変量の研究は、対数的退化を用いてミラー対称性を研究するGross-Siebert programなどにも応用が見込まれる。

研究成果の概要(英文)：1. I defined the notion of a module over a manifold endowed with the structure of a quandle (quandle manifold), and provided various examples. Then, in the case the quandle manifold is a "regular s-manifold", I defined regular modules, and showed that they correspond to regular representations of a certain algebra, called an infinitesimal s-manifold. Furthermore, I arrived at an outlook on how they relate to representations of the relevant Lie algebra.

2. I obtained results on how to associate a quandle or a multiple conjugation quandle to an integer ring, and how the integer ring can be reconstructed.
 3. I studied logarithmic BPS invariants and logarithmic Gromov-Witten invariants; how they are related to local BPS invariants; a conjecture that they are independent of the point of contact; the contribution of a degenerate curve.

研究分野：代数幾何学

キーワード：代数多様体 カンドル Lie-Yamaguti代数 代数的整数環 対数的幾何学 Gromov-Witten 不変量

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

カンドルとは、二項演算により定まるある種の代数系である。カンドルの概念は、明示的には、Joyce および Matveev の結び目に関する研究の中で定義された。彼らは結び目(や絡み目)に対して結び目カンドルというものを定義した。その後、さらなる不変量を与えるものとしてカンドルのホモロジー・コホモロジー理論が展開され、またカンドル上の加群の概念が Andruskiewitsch-Grana や Jackson により与えられた。

一方で、結び目理論からは有限カンドルの利用が主であったが、Rubinsztein は位相カンドルの概念を与え、結び目と位相カンドルが与えられたとき「彩色空間」という空間が不変量として定まることを示した。

このような状況のもと、研究代表者は、代数多様体とその上のカンドル演算であって正則な写像により定まるようなものの組としてカンドル多様体を定義し、「代数的に連結」という性質を持つカンドル多様体が代数群を用いて記述されることを示していた。また、遠アーベル幾何学や素数と結び目の類似にヒントを得て、数論的多様体(\mathbb{Z} 上有限型のスキーム)とその閉点の集合に対して結び目カンドルの類似となるカンドルを定義し、またこのカンドルからもとの数論的多様体の情報を復元する方法について研究してきた。

2. 研究の目的

代数幾何学・数論において自然に現れるカンドルについて、以下のような考察を行うことを目的とした。

- A. カンドル多様体に関し、線形化(代数群と Lie 環の対応の類似)、カンドル多様体上の加群の圏、ホモロジー・コホモロジー理論、カンドル多様体の持つ特異点、「彩色空間」の性質などについて研究する。
- B. 数論的な多様体に付随するカンドルの性質やカンドルからの多様体の復元問題を調べ、応用を図る。

3. 研究の方法

カンドル多様体の線形化や加群の研究については、Lie 環論、対称空間論、離散カンドル上の加群の理論、Lie-Yamaguti 代数の理論などを、各分野の専門家との研究交流を通して、カンドル多様体の視点から一般化・統合することを目指す。

数論的多様体に付随するカンドルについては、低次の代数体やアーベル体の場合に研究代表者の既存研究を拡張するとともに、基本群の非可換性を利用した復元について、巾零拡大の場合などを手掛かりに研究する。

4. 研究成果

- A. カンドル多様体の研究では、主にカンドル多様体上の加群について多くの成果があった。

まず、カンドル多様体上の加群について、Andruskiewitsch-Grana による離散カンドル上の加群の場合を参考に定義を行った。また、興味深い例として、カンドル多様体の内部自己同型群による商集合が一点とその補集合からなる場合に、一点軌道に台を持つ加群などを観察した。

また、カンドル多様体が特に正則 s 多様体と呼ばれるもの場合には、その上の「正則」という性質を持つ加群と無限小 s 多様体(ある種の自己同型付き Lie-Yamaguti 代数)の正則な表現の間に対応があることを示した。証明に際しては、正則 s 多様体と無限小 s 多様体の対応をより詳細に調べることが必要となった。特に、正則 s 多様体の準同型は必ずしも内部自己同型群や transvection の群の準同型を定めないことが知られているが、一方で無限小 s 多様体の準同型とは対応することを、複数の方法により証明した。この結果については、Journal of Lie Theory 誌に公表した。

さらに、この対応を用いて、具体的な正則 s 多様体上のカンドル加群の研究を行なった。まず、 $SL(2, \mathbb{C})$ の一般の共役類 Q を共役演算により正則 s 多様体と見るとき、対応する無限小 s 多様体 T の表現を調べた。特に、1 次元および 2 次元の場合には具体的な計算により分類を行い、対応する Q 上のカンドル加群の記述を与えた。

この結果から、 T の正則な表現 V が、 $sl(2, \mathbb{C})$ の表現からある方法で得られるもののみであろう、ということが示唆された。このことを証明するためには、まず表現 V から定まる正則 s 多様体に付随するリー環を考え、このリー環から $sl(2, \mathbb{C})$ への全射準同型がよい切断を持つことなどを示してゆく必要があるが、実際にこれが可能であることがわかってきた。

さらに、このことがより一般に半単純リー群の一般の共役類の場合でも言えることが、現在明らかになりつつある。

離散カンドル上の加群は結び目理論での不変量の構成などに応用されているが、今後はカンドル多様体上の加群の応用も進められてゆくものと期待している。より直接的には、正標数への還元を通して有限カンドル加群の様々な例が与えられる。また、カンドル多様体自体を理解する上でカンドル加群が果たす役割は大きいものと期待される。したがって、カンドル多様体としてある意味で代表的とも言える正則 s 多様体について、その上の加群についての理解が進んだことは大きな意味を持つと考えている。

B. 数論的多様体に付随するカンドルについて。

数論的多様体に対し、有限体を剰余体とする点の集合を考え、そのガロア被覆における逆像にカンドルの構造を定め、またそのカンドルからの多様体の還元について考察を行った。この問題については、本研究課題開始前から有理数体または二次体とその素イデアルから得られるカンドルについての論文の作成を始めていたが、遠アーベル幾何学における議論との類似などについて加筆して完成させ、Kyushu Journal of Mathematics 誌に公表した。また、上記の研究では主にアーベル被覆を用いたが、可解だが非可換なガロア群をもつ被覆の場合の例についても考察した。

さらに、たとえば数論的多様体として代数的整数環のスペクトラムから有限個の点を除いたものを考え、除いた点における完備化の商体のスペクトラムの、ガロア被覆における逆像の上に定まる多重共役カンドルの構造などについて研究した。

整数環のスペクトラムと三次元多様体・結び目の間には様々な類似が成立することが知られているが、数論的多様体に付随するカンドルを考えることは一つの興味深い視点を与えている。

C. 対数的幾何学、特に対数的 Gromov-Witten/BPS 不変量。

研究代表者が過去に研究対象としてきた相対 Gromov-Witten 不変量の周辺で新たな進展があったため、Jinwon Choi 氏、Michel van Garrel 氏、Sheldon Katz 氏との共同で研究を行なった。

まず、種数 0 の最大接触の対数的 BPS 不変量と局所 BPS 不変量の関係について、壁越え現象を用いて局所 BPS 不変量を計算する等の方法を用いて調べ、International Mathematics Research Notices 誌に公表した。

次に、対数的 Calabi-Yau 曲面上の、ある曲線類における種数 0 の最大接触の対数的 BPS 不変量について、接触点の候補となる点ごとにこの不変量を考えると、その値が接触点に依存しないという予想を立てた。また、対数的曲面が del Pezzo 曲面と反標準因子の組であり、曲線類が種数 2 以下である場合について、予想の成立を確かめた。この結果については、Transactions of the American Mathematical Society 誌に公表した。

さらに、対数的 Calabi-Yau 曲面上の A^1 曲線、あるいはその可約な退化の、対数的 Gromov-Witten/BPS 不変量への寄与を調べた。この中で用いられる、対数的状況でのある種の 1 次元層のモジュライ空間の非特異性や対数的安定写像の具体的な記述などは、それ自体興味深い結果でもある。論文は Selecta Mathematica 誌に公表した。

対数的 Gromov-Witten 不変量は、曲線の数え上げの問題に関連して興味深いのみならず、鏡映対称性に関する Gross-Siebert のプログラムなどでも重要である。通常の Gromov-Witten 理論においては Donaldson-Thomas あるいは Pandharipande-Thomas 不変量との対応が様々な結果を導いており、対数的状況への一般化が望まれる。本研究では、対数的状況でのある種の層のモジュライ空間が非特異であることが示されたが、さらに、シンプレクティック構造も入る可能性があることがわかってきた。この空間のコンパクト化を調べることは、Donaldson-Thomas あるいは Pandharipande-Thomas 理論の対数化に関わる重要な問題であると思われる、今回の研究の成果はその指針として役立つものと言える。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Jinwon Choi, Michel van Garrel, Sheldon Katz, Nobuyoshi Takahashi	4. 巻 374
2. 論文標題 Log BPS numbers of log Calabi-Yau surfaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 687-732
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/tran/8234	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Nobuyoshi Takahashi	4. 巻 -
2. 論文標題 Modules over geometric quandles and representations of Lie-Yamaguti algebras	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Lie Theory	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nobuyoshi Takahashi	4. 巻 73
2. 論文標題 Quandles associated to Galois covers of arithmetic schemes	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Kyushu Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 145-164
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2206/kyushujm.73.145	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Choi Jinwon, van Garrel Michel, Katz Sheldon, Takahashi Nobuyoshi	4. 巻 to appear
2. 論文標題 Local BPS Invariants: Enumerative Aspects and Wall-Crossing	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 to appear
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rny171	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Choi Jinwon, van Garrel Michel, Katz Sheldon, Takahashi Nobuyoshi	4. 巻 27
2. 論文標題 Sheaves of maximal intersection and multiplicities of stable log maps	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Selecta Mathematica	6. 最初と最後の頁 Paper No. 61
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00029-021-00671-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計4件 (うち招待講演 4件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 高橋 宣能
2. 発表標題 カンドル空間上の加群と Lie-山口代数の表現
3. 学会等名 研究集会「カンドルと対称空間」(招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Nobuyoshi Takahashi
2. 発表標題 Modules on quandle spaces and representations of LY algebras
3. 学会等名 Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 高橋 宣能
2. 発表標題 Modules on quandle varieties
3. 学会等名 Higher dimensional algebraic geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Nobuyoshi Takahashi
2. 発表標題 Log BPS numbers and contributions of degenerate log maps
3. 学会等名 Online workshop on mirror symmetry and related topics, Kyoto 2021 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
韓国	Sookmyung Women's University			
英国	The University of Warwick	University of Birmingham		
米国	Univ. of Illinois at Urbana-Champaign			