

令和 4 年 6 月 17 日現在

機関番号：25403

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K05208

研究課題名(和文) 正標数の代数的閉体上で定義されたファノ多様体についての研究

研究課題名(英文) Study on Fano varieties defined over an algebraically closed field in positive characteristic

研究代表者

齋藤 夏雄 (Saito, Natsuo)

広島市立大学・情報科学研究科・准教授

研究者番号：70382372

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：正標数の代数的閉体上で定義されたFano多様体に関係するさまざまな研究を行い、次のような結果を得た：

1. F分裂しない次数1の非特異del Pezzo曲面について調べ、標数5においてはそのような曲面が同型を除いて一意であり、その自己同型群が6次対称群の外部自己同型の存在と関係があることを示した。
2. 標数2で小平次元1の準楕円曲面について、多重標準因子線形系がファイブレーションの構造射をいつ与えるかという未解決問題に取り組み、これを解決した。さらにIII型ファイバーを持つ標数2の準楕円K3曲面のMordell-Weil群の構造を解析し、そこから20次元の線形符号を構成することに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

代数多様体の分類を完成させることは代数幾何学における大きな研究テーマであるが、正標数の体上では分類に役立つ定理のいくつかが成立せず、理論の構築は容易ではない。したがって、分類を行ううえで重要な役割を果たすFano多様体やそれにまつわる正標数特有の幾何的構造を解明することは大きな意義がある。本研究において特に低標数の場合に発生するいくつかの特殊な構造を記述することに成功したことは、正標数の代数多様体の分類理論の発展に資するものである。

研究成果の概要(英文)：We studied various properties about Fano varieties over an algebraic closed field in positive characteristic to have the following result:

1. We investigated non-F-split del Pezzo surfaces of degree 1. Especially, we showed that such surfaces are unique up to isomorphisms if the characteristic of the ground field is 5, and its automorphism group is related to the fact that the symmetric group of degree 6 has an outer automorphism.
2. We solved an open problem on the multicanonical system of quasi-elliptic surfaces with Kodaira dimension 1 in characteristic 2. Also, we analyzed the structure of Mordell-Weil group of quasi-elliptic K3 surfaces which has twenty reducible fibers of type III in characteristic 2, to construct a 20-dimensional linear code.

研究分野：代数幾何学

キーワード：正標数 del Pezzo曲面 準楕円曲面

1. 研究開始当初の背景

代数幾何学において代数多様体をいくつかの基本的な不変量によって分類することは、この分野の中心テーマともいえるべき重要なタスクといえる。20世紀に Grothendieck らが中心となって現代的な理論体系が構築されたことでこの分野は飛躍的に発展し、イタリア学派による代数曲面の分類が精密化されるとともに、特に基礎体が標数0の代数的閉体であるときは、森や川又らによる極小モデルプログラム (MMP) の確立によって3次元の代数多様体の分類理論も一応の完成を見るに至った。また、この MMP が整備される過程において、Fano 多様体を解析することの重要性も認識されるようになった。

一方、基礎体の標数が正であるときは、消滅定理や特異点解消定理など、MMP において重要な役割を果たす定理が成り立たないうえ、Sard の定理の不成立に起因する特殊なファイブレーションや低標数における taut でない有理二重点の存在など、「病的 (pathological)」としばしば形容される特殊な現象が起きることが障害となり、研究はやや立ち後れていた。しかし、正標数の特異点解消に関する Cossart-Piltant (文献) による結果や、Shepherd-Barron (文献) や Megyesi (文献) による正標数3次元 Fano 多様体の解析など、最近になって正標数の代数多様体の分類に関係する研究が多く発表されるようになってきた。また近年注目されているのが、Frobenius 写像を用いて特異点を調べる F 特異点の理論である。すでに F 分裂や F 正則といった F 特異点の諸概念が対数的端末特異点など MMP において現れる特異点と一部対応することが明らかになっており、この手法が標数0と正標数の代数幾何学、双方の発展に大きく貢献する可能性が高まっている。このように、研究開始当初の時点において、正標数の代数幾何学は発展の気運を迎えていた。

2. 研究の目的

前項で述べたような背景を踏まえ、本研究においては

- (1) 2次元の Fano 多様体である del Pezzo 曲面、および3次元の Fano 多様体と F 分裂性との関係を調べる。特に、低標数において F 分裂性を持たない Fano 多様体の特徴付けを得ることを目指す。
 - (2) 正標数特有のファイブレーションである準楕円ファイブレーションについてさまざまな角度から調べ、準楕円曲面についての知見を得る。具体的には、以下の問題を考える：
 - 特に小平次元1の準楕円曲面について、その多重標準線形系がいつ準楕円曲面としての構造射を与えるかという問題は標数2の場合には未解決であるので、これに取り組む。準楕円ファイブレーションの構造を持つ超特異 K3 曲面に対し、その Mordell-Weil 群の構造を解析する。
- を主要な目的とした。

3. 研究の方法

- (1) まず del Pezzo 曲面の F 分裂性については、原 (文献) らの研究により、F 分裂しない del Pezzo 曲面は次数3以下のものに限られること、また次数3のときは標数2のときにのみ限られることが知られていた。また申請者の以前の研究 (文献) により、F 分裂しない次数2の del Pezzo 曲面は標数2または3に限られ、反標準因子線形系の一般メンバーがすべて超特異楕円曲線であることが、その曲面の非 F 分裂性と同値であることが明らかになっていた。そこで残された次数1の場合も、Fedder の判定条件を用いて定義方程式を得たうえで、反標準因子の線形系に属する楕円曲線の超特異性との関係について調べた。また次数2以上の非 F 分裂 del Pezzo 曲面においてはブローアップの中心となる射影平面上の点の配置による特徴付けも得られていたが、次数1の場合にもこうした幾何的条件で記述できるかを考察した。
- (2) 準楕円曲面に関して以下のような問題を考える：
 - 標数2の代数的閉体上定義された小平次元1の曲面 S は、種数1のファイブレーション $f: S \rightarrow B$ の構造を持つ。 S の標準因子がつくる多重標準線形系 $|mK_S|$ は、 m が十分大きいときにファイブレーションの写像を与える。そこで、以下のような問題を設定する：

問題 . 正の整数 M であって、任意の $m \geq M$ に対し $|mK_S|$ が種数1ファイブレーション $f: S \rightarrow B$ を与えるような M は存在するか？ また存在するなら、その最小値はいくつか？

この問題は、楕円曲面の場合は桂-上野 (文献) および桂 (文献)、準楕円曲面の場合も標数3のときは桂 (文献) によって解決している。残された標数2の準楕円曲面の場合も、標準束公式を詳細に吟味することにより、「楕円曲線上の準楕円曲面で II 型の tame な重複ファイバーを 1 本だけ持つものが存在するか」を決定することに帰着される。そこで、射影直線と楕円曲線の直積で与えられる曲面上に有理ベクトル場を

考えることでこうした曲面を構成することを目指した。

伊藤(文献 [1], [2]) は標数2,3のそれぞれにおいて有理準楕円曲面を分類し, 可約ファイバーのタイプごとに定義方程式を与えたとともにそれぞれの Mordell-Weil 群の構造を解析した。伊藤は標数3の準楕円 K3 曲面に対しても同様の結果を得ているが, 標数2の準楕円 K3 曲面については計算が膨大かつきわめて煩雑なものになるため, 具体的な結果が得られていなかった。そこで特定の可約ファイバーの場合にまず状況を限定したうえで, 具体的な計算を試みることから始めた。

4. 研究成果

- (1) 次数1の del Pezzo 曲面の F 分裂性について調べ, 以下の定理を得ることができた。

定理 . X を次数1の非特異 del Pezzo 曲面とする。このとき以下は同値である(ただし, 以下で $f_n(t_0, t_1)$ は任意の斉次 n 次式とする) :

- X は F 分裂しない。
- 標数 p は 2, 3, 5 のいずれかであり, X はそれぞれ重み付き射影空間 $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$ の次数6の超曲面として以下のように定義される :

$$p=5: y^2 = x^3 + t_0^6 + t_1^6$$

$$p=3: y^2 = x^3 + f_4(t_0, t_1)x + f_6(t_0, t_1)$$

$$p=2: y^2 = x^3 + f_2(t_0, t_1)x^2 + f_4(t_0, t_1)x + f_6(t_0, t_1)$$

特に $p=5$ のときは, X の自己同型群 $\text{Aut}(X)$ とその位数は

$$\text{Aut}(X) = C_3 \times (S_5 \rtimes C_2), \quad |\text{Aut}(X)| = 720$$

となる。

さらに, $p=5$ のときの非 F 分裂 del Pezzo 曲面の自己同型群が標数0の場合と異なり上記のようなやや位数の大きな群として与えられることが, 「 n 次対称群は $n = 6$ のときに限り外部自己同型を持つ」という群論においてよく知られた事実と関係があることを見出した。また, 次数2以上の場合と異なり, 次数1では反標準因子の線形系に属する一般メンバーの超特異性は非 F 分裂性と必要十分ではないことも確認できた。

- (2) 準楕円曲面に関する問題について, 以下のような結果を得た。

桂利行氏との共同研究により, 以下のような定理を得た :

定理 . S を標数2の代数的閉体上定義された小平次元1の準楕円曲面とする。このとき, その多重標準線形系 $|mK_S|$ は, $m \geq 6$ のとき必ずファイブレーションの構造射を与える。またこの評価は最良であって, $m = 5$ のときに構造射とならない例が実際に存在する。

これによって, 3.(2) に述べた問題に回答を与えた。基礎体の標数が2以外のときは小平次元1の楕円曲面および準楕円曲面に対する同様の問いはすでに解決しており, これですべての場合について問題が解けたことになる。

本研究で得られた結果は, Journal of Mathematical Society of Japan に採録された。

伊藤浩行氏, 大津嘉輝氏との共同研究を行い, 標数2の準楕円 K3 曲面で III 型の可約ファイバーを 20 個持つものについて詳しく解析を行った。その結果, Mordell-Weil 群のランクが7であるような準楕円 K3 曲面を構成し, 128 個のセクションすべての記述を与えることに成功した。さらにこれらのセクションと 20 個の可約ファイバーがどのように交わっているかを解析することにより, $(20, 7, 8)$ -線形符号が構成できることを示した。

以上の内容は, 2022 年 3 月 4 日に東京理科大学で行われたワークショップ「代数学の萌芽」で共同研究者の大津によって発表されたが, コロナ禍もあって十分な研究を行えないまま研究期間を終えてしまったので, 次の研究テーマの一つとして据えたうえでさらに考察を進め, 論文としてまとめたいと考えている。

< 引用文献 >

- V. Cossart and O. Piltant, “Resolution of singularities of threefolds in positive characteristic I”, J. Algebra 320:1051-1082, 2008.
- N. Hara, “A characterization of rational singularities in terms of injectivity of Frobenius maps”, Amer. J. Math. 120:981-996, 1998.
- H. Ito, “The Mordell-Weil groups of unirational quasi-elliptic surfaces in characteristic 3”, Math. Z. 211:1-39, 1992.
- H. Ito, “The Mordell-Weil groups of unirational quasi-elliptic surfaces in characteristic 2”, Tohoku Math. J. 46:221-251, 1994.
- T. Katsura and K. Ueno, “On elliptic surfaces in characteristic p ”, Math. Ann. 272:291-330, 1985.
- T. Katsura, “Multicanonical systems of elliptic surfaces in small characteristics”, Compositio Math. 97:119-134, 1995.

- T.Katsura, "On the multicanonical systems of quasi-elliptic surfaces in characteristic 3", In: Schubert Varieties, Equivariant Cohomology and Characteristic Classes, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc.:153-157, 2018.
- G. Megyesi, "Fano threefolds in positive characteristic", J. Alg. Geom. 7:207-218, 1998.
- N. Saito, "Characterization of non-F-split del Pezzo surfaces of degree 2", Tokyo J. Math. 40:247-253, 2017.
- N. I. Shepherd-Barron, "Fano threefolds in positive characteristic", Compos. Math. 105:237-265, 1997.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 0件）

| | |
|---|-------------------------|
| 1. 著者名 Toshiyuki Katsura and Natsuo Saito | 4. 巻 73 |
| 2. 論文標題 On the multicanonical systems of quasi-elliptic surfaces | 5. 発行年 2021年 |
| 3. 雑誌名 The Mathematical Society of Japan | 6. 最初と最後の頁 1253-1261 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/jmsj/85058505 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 6件／うち国際学会 1件）

| |
|---|
| 1. 発表者名 齋藤 夏雄 |
| 2. 発表標題 On the multicanonical systems of quasi-elliptic surfaces |
| 3. 学会等名 野田代数幾何学ワークショップ2021（招待講演） |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 齋藤 夏雄 |
| 2. 発表標題 F分裂しない Idel Pezzo曲面とその自己同型群 |
| 3. 学会等名 第7回代数幾何学研究集会 - 宇部 - （招待講演） |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 齋藤 夏雄 |
| 2. 発表標題 F分裂しない Idel Pezzo曲面の探究 |
| 3. 学会等名 研究集会「ファノ多様体及び関連する代数幾何学」（招待講演） |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 齋藤 夏雄 |
| 2. 発表標題 F分裂しないdel Pezzo曲面について |
| 3. 学会等名 研究集会「射影多様体の幾何とその周辺2019」(招待講演) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Natsuo Saito |
| 2. 発表標題 Fano varieties in positive characteristic and their F-splittings |
| 3. 学会等名 Hakodate workshop on arithmetic geometry 2018 (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 齋藤 夏雄 |
| 2. 発表標題 Deformation spaces of rational double points in small characteristic |
| 3. 学会等名 野田代数幾何学シンポジウム2018 (招待講演) |
| 4. 発表年 2018年 |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

| | 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|-------|---|---------------------------------------|----|
| 連携研究者 | 伊藤 浩行 (Ito Hiroyuki) (60232469) | 東京理科大学・理工学部・教授 (32660) | |

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|
|---------|---------|