

令和 3 年 6 月 11 日現在

機関番号：32644

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K05210

研究課題名(和文)代数多様体上の曲線の変形障害とヒルベルトスキームの研究

研究課題名(英文)Obstructions to deforming curves on algebraic varieties and a study on their Hilbert schemes

研究代表者

那須 弘和 (Nasu, Hirokazu)

東海大学・理学部・准教授

研究者番号：30535331

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,500,000円

研究成果の概要(和文)：代数幾何学の分野における重要な研究対象の一つであるヒルベルトスキームに対しその具体的諸性質について理解を深めるために研究を行なった。主な研究成果は以下の通りである：

1. 3次元主ファノ多様体上の非特異連結曲線のヒルベルトスキームが生成的に被約でない既約成分を持つことを証明した。本結果によりマンフォードの有名な非被約成分の例がピカル数1の任意の非特異3次元ファノ多様体のヒルベルトスキームへ一般化された。
2. エンリケス・ファノ多様体(EF3)と呼ばれる特異ファノ三様体のクラスに対し、その上の非特異連結曲線のヒルベルトスキームが生成的に被約でない既約成分を持つための十分条件を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

マンフォード(1962)は3次元射影空間内の非特異連結曲線のヒルベルトスキームが生成的に被約でない既約成分を有すことを証明し当時の人々を驚かせた。研究成果1では指数 r の3次元ファノ多様体に対しこの例の一般化を行なった。 $r=4$ の場合はマンフォードの例により、 $r=3$ と $r=2$ の場合は向井・那須の結果(2009)により知られていた。残りの $r=1$ の場合(主ファノ三様体)が、K3曲面とその上の円錐曲線を用いることにより解決した。研究成果2については3次元多様体に穏やかな特異点を許し、エンリケス曲面とその上のハーフペンシルを用いて非被約成分を構成した。以上によりマンフォードの例が広範囲に一般化された。

研究成果の概要(英文)：We study some explicit properties of Hilbert schemes, which are one of the most important objects in algebraic geometry. Our main results are the followings:

1. We prove that the Hilbert scheme of smooth connected curves on every prime Fano threefold contains a generically non-reduced component. By this result, an celebrated example due to Mumford (for the projective 3-space) has been extended to the Hilbert scheme of every smooth Fano threefold of Picard rank one.
2. Let X be an Enriques-Fano threefold (called an EF3), that is a singular Fano threefold. We give a sufficient condition for the Hilbert scheme of smooth connected curves on X to have a generically non-reduced component.

研究分野：代数幾何学

キーワード：ヒルベルトスキーム 変形 障害 ファノ多様体 エンリケス・ファノ多様体 K3曲面 エンリケス曲面 空間曲線

1. 研究開始当初の背景

(1) 固定された射影的代数多様体上の曲線全体の集合には射影スキームの構造が入り、ヒルベルトスキームと呼ばれる。マンフォード (1962) は 3 次元射影空間 \mathbb{P}^3 内の非特異連結曲線のヒルベルトスキーム $Hilb^{sc} \mathbb{P}^3$ が生成的に被約でない (generically non-reduced) 既約成分を持つことを示し、ヒルベルトスキームの病理 (pathology) と位置づけた。その後この例は Gruson-Peskine, Kleppe, Ellia, Floystad などの多くの研究者により $Hilb^{sc} \mathbb{P}^3$ に対し様々な方向で一般化された。近年になり、報告者が向井茂氏との共同研究において 3 次元射影多様体上の曲線の一位無限小変形に対する第一障害 (primary obstruction) を計算し、マンフォードの例を多くの 3 次元単線織多様体のヒルベルトスキームの場合に一般化した (2009)。

(2) 報告者は 2016 年頃に上記の第一障害の計算手法を一般化し、 $K3$ 曲面上の曲線に適用した。その結果マンフォードの例が 4 次超曲面 $V_4 \subset \mathbb{P}^4$ などを含む、より広いクラスの 3 次元ファノ多様体のヒルベルトスキームの場合に拡張され、本研究開始のための準備が整っていた。

2. 研究の目的

マンフォードが与えた非被約既約成分の例を他の 3 次元射影多様体のヒルベルトスキームの場合に一般化もしくは簡易化することにより、非被約性をはじめとするヒルベルトスキームの諸々の具体的な性質に関する理解を深めることが本研究の目的である。特に曲線の被障害変形 (obstructed deformation) と多様体上の特殊な曲線 (有理曲線や楕円曲線など) との間に存在すると見られる興味深い関係について、無限小変形と障害類を用いた手法により研究を行う。また上記の曲線の一位無限小変形に対する第一障害の計算手法を精密化し、与えられた代数多様体上の曲線が、どのような条件の下で変形障害を受けるか? という問題に解答を与えることも本研究の目標の一つとして挙げられる。

3. 研究の方法

(1) 種々の変形理論においては障害類の空間が定まっている。代数多様体 X のヒルベルトスキーム $Hilb X$ の場合には部分スキーム $C \subset X$ の法束 $N_{C/X}$ のコホモロジー群 $H^1(C, N_{C/X})$ である。 $H^1(C, N_{C/X})$ が消滅するならば $Hilb X$ は C に対応する点 $[C]$ において非特異であるが、そうでない場合に一般論はない。障害類を具体的に計算する報告者の方法には一般論の無い困難な状況において $Hilb X$ の研究を進展させる可能性がある。第一障害はカップ積写像 $ob: H^0(C, N_{C/X}) \rightarrow H^1(C, N_{C/X})$, $\alpha \rightarrow \alpha \cup \alpha$ の像に等しく、一般にその非零を示すことは困難である。報告者はカップ積をより単純なカップ積へと順に帰着させる方法を考案し計算に役立てている。

(2) 代数幾何学の研究の歴史の中でファノ多様体は古くから研究されてきた重要な研究対象の一つである。中でも非特異 3 次元ファノ多様体については Iskovskikh と藤田、森・向井達の研究により分類が完成しており、これらの多様体上の曲線の変形を調べることは興味深い。本研究では 3 次元射影多様体として、このファノ多様体を取り上げ、多様体上の曲線の変形障害およびそのヒルベルトスキームに関する研究を行なった。また研究期間の後半では、多様体に緩やかな特異点を許し、エンリケス・ファノ多様体上の曲線の変形障害やヒルベルトスキームの研究を行なった。

4. 研究成果

(1) 2017 年度は主に非特異 3 次元ファノ多様体上の曲線のヒルベルトスキームに関する研究を行い、以下の研究成果を得た。

- ① 非特異 3 次元主ファノ多様体に対し、その上の非特異連結曲線のヒルベルトスキームに生成的に被約でない既約成分が存在することを証明した。
- ② 非特異 3 次元ファノ多様体のヒルベルト旗スキームが、非特異かつ期待次元を持つための明示的な条件を得た。
- ③ 非特異 3 次元主ファノ多様体上の退化曲線が安定的に退化する (stably degenerate) ための十分条件を与えた。

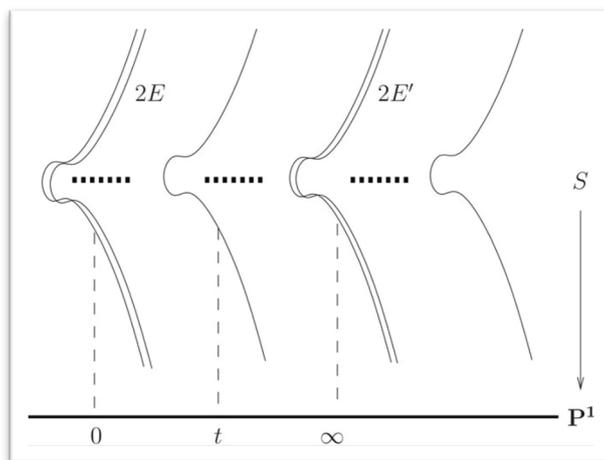
X をピカル数 1 の非特異 3 次元ファノ多様体とし、そのファノ指数を r とする。 $r = 4$ の場合にはマンフォードの例 (1962) により、 $r = 3$ と $r = 2$ の場合には向井・那須の結果 (2009) により、 X 上の非特異連結曲線のヒルベルトスキームが生成的に被約でない既約成分を持つことが知られていた。 $r = 1$ の場合も報告者により部分的な結果 ($g = 3$) が得られていたが、この $r = 1$ の場合を一般的に解決し (結果①)、マンフォードの例をピカル数 1 の非特異 3 次元ファノ多様体のヒルベルトスキームへ一般化した。この結果は 2007 年に開催されたある研究集会において佐藤栄一氏が行なった質問への解答となった。多様体上の円錐曲線をうまく利用することにより、埋め込み変形が障害を受けるような被障害曲線の族を構成した。一方、ファノ多様体のヒルベルト旗スキームの研究にも取り組んだ (結果②)。この研究を応用することにより、退化曲線の障害性と安定性について調べ、曲線に対応する点におけるヒルベルトスキームの次元を決定した

(結果③)。これらの結果を論文「Obstructions to deforming curves on a prime Fano 3-fold」にまとめ雑誌に投稿し、2019 年に出版された。長年未解決のままであった指数 1 の 3 次元ファノ多様体のヒルベルトスキームの問題を解決できて満足している。一方、退化曲線の安定性の決定問題についてはある技術的な問題が生じ、一部の退化曲線の安定性を決定できなかったことが心残りである。

(2) 2018 年度は 2017 年度の続きとして 3 次元多様体に特異点を許し、エンリケス・ファノ三様体 (EF3) 上の曲線の変形障害について研究を行なった。主な研究成果は以下の通りである：

- ④ EF3 上の非特異連結曲線のヒルベルトスキームに生成的に被約でない既約成分 (generically non-reduced component) が存在するための十分条件を与え、特に種数が 9 と 13 の EF3 の場合にその存在を示した。
- ⑤ EF3 のヒルベルト旗スキームが非特異かつ期待次元を持つための明示的な条件を与えた。

EF3 はエンリケス曲面を超平面切断として含む 3 次元射影多様体である。エンリケス曲面は代数幾何学分野において $K3$ 曲面と並び古くから研究されてきた魅力的な研究対象の一つである。エンリケス曲面はいつでも楕円ファイブレーションの構造を持ち、ちょうど 2 個の点において 2 重ファイバー ($2E$ と $2E'$) を持つことが知られている。この E と E' はハーフペンシルと呼ばれる。



EF3 上の曲線のうち、エンリケス曲面に含まれるような曲線の変形障害について研究を行い、曲面上のハーフペンシルを利用して、ヒルベルトスキームの非被約成分の存在を示した (結果④)。より詳しくは次の定理を証明した。

定理 1. X をエンリケス・ファノ三様体、 $S \subset X$ をエンリケス曲面とする。もし次の 2 つの条件を満たすハーフペンシル $E \subset S$ が存在するならば、 X 上の非特異連結曲線のヒルベルトスキームは生成的に被約でない既約成分をもつ：

- (i) $(-K_X \cdot E)_X \geq 2$,
- (ii) $H^1(E, N_{E/X} \otimes N_{E/S}) = 0$.

全ての EF3 は孤立特異点を持つことが知られている (Conte-Murre)。端末的巡回商特異点のみを持つ場合には、佐野と Bayle の結果により 14 種類の同型類に分類されるが、そのうち 2 種の EF3 (種数 9 と 13 の場合) が実際に定理の条件を満たすことを確認した。また非特異ファノ多様体 (と $K3$ 曲面) のヒルベルト旗スキームに関する前年度の研究を応用し、EF3 の旗スキームの非特異性と次元に関する結果を得た (結果⑤)。一方、京都大学の向井茂教授の退職を記念する国際研究集会「Algebraic Geometry and Moduli Theory」を金銅誠之氏、中山昇氏、大橋久範氏と共同で主催し、招待講演者の Beauville 氏、Debarre 氏、Shepherd-Barron 氏による講演が行われた。特異ファノ三様体のヒルベルトスキームに関する研究を開始し、結果を得られたことは良かった。エンリケス・ファノ三様体とエンリケス曲面のペアを考察することにより、ヒルベルトスキームの非被約成分に関する研究を進めることができた。非特異ファノ三様体と $K3$ 曲面のペアとはまた異なる設定で、ヒルベルトスキームの性質について良く似た現象が観察されたことについて興味深く感じている。

(3) 2019 年 4 月から同 9 月まで所属先の東海大学において特別研究期間 (サバティカル) が認められ、同期間においてオスロ大学数学科に滞在し研究課題に関する研究を行った。滞在期間中の主な成果は以下の通りである。

- ⑥ エンリケス・ファノ三様体 (EF3) 上の曲線の変形障害に関する研究を行い、エンリケス曲面上の (-2) 曲線やハーフペンシルを用いて、曲線が変形障害を受けるための十分条件を与えた。前年度に開始した EF3 のヒルベルトスキームに関する研究をさらに進展させ、新たに種数 6 の EF3 に対してもヒルベルトスキームの非被約成分の例を構成した。
- ⑦ 空間曲線のヒルベルトスキームに関する Kleppe-Ellia 予想の証明に取り組み、曲線が 2 次

的正規な場合の証明を完成させた。さらに非特異 3 次曲面に含まれる空間曲線に対し、曲面上の直線を用いて、変形障害を受けるための十分条件を与えた。

上記の研究成果を 2 つの論文「Obstructions to deforming curves on an Enriques–Fano 3-fold」と「Obstructions to deforming space curves lying on a smooth cubic surface」(arXiv:1906.10390 および arXiv:1909.08452)にまとめプレプリントとして発表した。特別研究期間中は J. O. Kleppe 教授 (OsloMet) や J. C. Ottem 教授 (UiO) と集中的に議論を行い研究を進めた。また 2019 年 7 月にはデュッセルドルフで開催された研究集会「Del Pezzo surfaces and Fano varieties」に参加し、デルペッツォ曲面とファノ多様体に関する最新の研究成果に触れた。また 2019 年 10 月開催の城崎代数幾何学シンポジウムに参加し、上記の研究成果について講演を行った。特別研究期間(サバティカル)を取得し集中的に研究を進めることができたのは幸運だった。ノルウェーへの渡航前に計画した 2 本の論文についても、計画通り完成させることができて満足している。一方、最終年度の 2020 年 3 月には、新型コロナウイルスの感染拡大の影響により講演を予定していた研究集会「Commutative Algebra and Projective Algebraic Geometry in Kumamoto」が急遽開催中止となったことは残念であった。次年度開催の研究集会に参加し、本研究課題に関する成果報告を行うため補助事業期間の延長申請を行った。

(4) 2020 年度の研究成果は以下の通りである：

- ⑧ 非特異 3 次元ファノ多様体上の曲線のヒルベルトスキームに対し、多様体上の楕円曲線を用いて、生成的に被約でない既約成分を持つための十分条件を与えた。
- ⑨ 3 次元射影多様体上の曲線の 1 位無限小変形の障害性に関する以前の結果 (Internat. J. Math. 28 (13) (2017) 1750099 の定理 3.3) に誤りを発見し、定理を修正した。

前年度までの研究により、多くの非特異 3 次元ファノ多様体に対し、その上の非特異連結曲線のヒルベルトスキームが上記のような非被約成分を持つことが知られていた。その証明の中で多様体上の有理曲線とその変形が多様体全体を覆うという事実が鍵となった。研究結果⑧により、有理曲線に限らず、楕円曲線を用いてもそのような非被約成分の存在を証明できることがわかった。一方、向井・那須 (2009) では、3 次元射影多様体上の曲線の 1 位無限小変形に対し、2 位変形にリフトしないための十分条件が与えられた。上記論文の定理 3.3 ではこの結果の一般化が与えられたが、その主張と証明に誤り (反例も) が発見され、定理を修正した (結果⑨)。本結果は修正論文として Internat. J. Math. 31 (12) (2020) 2092001 に採録された。また代数多様体の射の視点からのヒルベルトスキームの研究を開始し、2020 年度は高次元射影空間に含まれる空間曲線に対し、その射影と曲線の障害性との間の関係について詳しく調べた。2020 年 10 月には、伊藤敦氏 (名古屋大) と佐藤拓氏 (福岡大) と共同で、城崎代数幾何学シンポジウム 2020 をオンライン (Zoom) 上で開催した。両氏と共同で編纂した本シンポジウム報告集が 2021 年 1 月に京都大学の情報レポジトリ紅 (KURENAI) より発行された。2020 年度は論文 2 本が出版されたので嬉しい。またコロナ禍のもと、開催が心配されていた城崎代数幾何学シンポジウム 2020 を多くの周りの方々のご助力のおかげで無事に開催することができた。自身の以前の結果の誤りの修正により、曲線の変形障害に関する理解が進んだ。定理 3.3 のさらなる精密化と定理の広範囲への適用に期待している。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 5件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Nasu Hirokazu	4. 巻 31
2. 論文標題 Corrigendum to “Obstructions to deforming curves on a 3-fold, III: Deformations of curves lying on a K3 surface”	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 International Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 2092001 ~ 2092001
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0129167X20920019	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Nasu Hirokazu	4. 巻 225
2. 論文標題 Obstructions to deforming curves on an Enriques-Fano 3-fold	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 106677 ~ 106677
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jpaa.2021.106677	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Nasu Hirokazu	4. 巻 292
2. 論文標題 Obstructions to deforming curves on a prime Fano 3 fold	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Mathematische Nachrichten	6. 最初と最後の頁 1777 ~ 1790
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/mana.201800185	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hirokazu Nasu	4. 巻 2019
2. 論文標題 Obstructions to deforming curves on an Enriques-Fano 3-fold	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 「城崎代数幾何学シンポジウム2019」報告集	6. 最初と最後の頁 85 ~ 94
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 那須 弘和	4. 巻 71
2. 論文標題 書評 R. Hartshorne: Deformation Theory (Grad. Texts in Math., 257)	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 数学	6. 最初と最後の頁 96 ~ 100
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nasu Hirokazu	4. 巻 28
2. 論文標題 Obstructions to deforming curves on a 3-fold, III: Deformations of curves lying on a K3 surface	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 International Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1750099 ~ 1750099
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0129167X17500999	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計12件 (うち招待講演 7件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 Hirokazu NASU
2. 発表標題 Obstructions to deforming curves on an Enriques-Fano 3-fold
3. 学会等名 Seminar in Algebra and Algebraic Geometry, University of Oslo (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hirokazu NASU
2. 発表標題 Obstructions to deforming curves on an Enriques-Fano 3-fold
3. 学会等名 Kinosaki Algebraic Geometry Symposium 2019, Kinosaki International Arts Center (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 那須弘和
2. 発表標題 Obstructions to deforming curves on a prime Fano threefold
3. 学会等名 熊本代数幾何・数論セミナー，熊本大学（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 那須弘和
2. 発表標題 Obstructions to deforming curves on an Enriques-Fano threefold
3. 学会等名 射影多様体の幾何とその周辺，高知工科大学（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 那須弘和
2. 発表標題 Obstructions to deforming curves on an Enriques-Fano 3-fold
3. 学会等名 東工大数論・幾何学セミナー，東京工業大学（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 那須弘和
2. 発表標題 3次元エンリケス・ファノ多様体上の曲線の変形障害について
3. 学会等名 東京電機大学数学講演会，東京電機大学（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hirokazu Nasu
2. 発表標題 Obstructions to deforming curves on an Enriques-Fano 3-fold
3. 学会等名 Algebraic Geometry and Moduli Theory Conference in Honor of Shigeru Mukai's Retirement , RIMS, Kyoto University (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 那須弘和
2. 発表標題 On the image of Hilbert-flag schemes and non-reduced components of the Hilbert scheme of Fano 3-folds
3. 学会等名 第4回社の都代数幾何学研究集会@仙台, 東北大学
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 那須弘和
2. 発表標題 Obstructions to deforming curves on a prime Fano threefold
3. 学会等名 第16回代数曲面ワークショップ at 秋葉原, 首都大学東京秋葉原サテライト (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 那須弘和
2. 発表標題 Obstructions to deforming curves on a prime Fano threefold
3. 学会等名 日本数学会2017年度秋季総合分科会, 山形大学
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 那須弘和
2. 発表標題 Obstructions to deforming curves on a prime Fano threefold
3. 学会等名 第5回K3曲面・エンリケス曲面ワークショップ, 北海道教育大学札幌駅前サテライト
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hirokazu Nasu
2. 発表標題 Obstructions to deforming curves on a prime Fano threefold
3. 学会等名 Hakodate workshop on arithmetic geometry 2017, 函館北洋ビル(国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>研究者ホームページ http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/ 東海大学総合理工学研究科 研究事例紹介(所属研究機関ページ) https://www.u-tokai.ac.jp/uploads/sites/19/2021/03/nasu.pdf</p>
--

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

<p>国際研究集会 Algebraic Geometry and Moduli Theory Conference in Honor of Shigeru Mukai's Retirement</p>	<p>開催年 2019年~2019年</p>
---	-------------------------------------

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
ノルウェー	University of Oslo	Oslo Metropolitan University	