様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　６ 月 １５ 日現在

機関番号：３２６８９
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2017～2019
課題番号：１７Ｋ０５２１２

研究課題名（和文）4次元3次超曲面上の層のモジュライと既約シンプレクティック多様体

研究課題名（英文）Moduli of sheaves on a cubic fourfold and irreducible symplectic manifolds

研究代表者

永井　保成（Nagai, Yasunari）

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：５０５７２５２５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,400,000円

研究成果の概要（和文）：4次元3次超曲面上の安定層であり，ヒルベルト多項式が5n+2になるようなもののモジュライ空間の中で，5次の正規有理曲線上のO(1)を含む既約成分を考え，その Kuznetsov 射影として得られる層，あるいは層の複体の空間を具体的に構成する問題を考えた．この問題の鍵は，もとの4次元3次超曲面の線形切断として得られる3次曲面に台が含まれるような層のモジュライ空間にあり，このモジュライ空間が，quiverの表現のモジュライ空間としてGIT商で表されることを見出した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
近年，代数多様体の導来圏の対象をパラメータ付けするモジュライ空間の研究が，代数幾何学の分野のみならず，数理物理の動機づけもあって非常に盛んであるが，この研究で構成しようと試みているモジュライ空間もこの種のものの非常に具体的な例である．科研費の期間中に求めるモジュライ空間の完全な記述までたどり着くことはできなかったが，本研究のアプローチは極めて明示的であり，抽象的である種漠然とした導来圏の安定性条件と安定対象のモジュライ空間について古典的かつ明示的な説明を与えるものとなり，高い学術的な意義を持つ．

研究成果の概要（英文）：We studied the irreducible component of the moduli space of stable sheaves on a cubic fourfold with the Hilbert polynomial 5n+2 that contains O(1) of a ratinoal normal quintic curve, and aimed at constructing explicitly the space of sheaves or complexes that are given by a Kuznetsov projection of the original sheaves. The key in constructing such a space is hidden in the locus of stable sheaves that are supported on a cubic surface given by a linear section of the original cubic fourfold. We found that the moduli of such sheaves can be described by a GIT quotient in relation to a certain moduli space of quiver representations.

研究分野：代数幾何学

キーワード：代数幾何学

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

K3 曲面上の安定層のコンパクトなモジュライ空間 M を考えると，これは高次元の既約シンプレクティック多様体の例を与える．高次元既約シンプレクティック多様体は，高次元代数多様体の基本的な構成要素の一つであり，代数幾何学のみならず，数理物理や表現論との関連でも興味をもって調べられている対象である．しかしながら，具体的に構成可能な高次元既約シンプレクティック多様体の例は本質的に 4 つの族しかない．上記の K3 曲面から作られる例はそのうちの一つである．このようなモジュライ空間Mを一つ取り，その変形を考えるとこれもまた既約シンプレクティック多様体になるが，一般の変形はもはや K3 曲面上の層のモジュライ空間としては記述できないことがわかっている．このことから，Mの変形として得られる射影的な既約シンプレクティック多様体の完備な族を具体的に構成し，あるいは記述することは興味深い問題である．次元が低い場合，4 次元の場合には Beauville-Donagi (1985) によって，この族は 4 次元 3 次超曲面Y上の直線のモジュライ空間$F(Y)$（いわゆる直線の Fano 多様体）として与えられることが知られている．また，直線の代わりに，4 次元 3 次超曲面上の捻れ 3 次曲線（とその極限）のモジュライ空間$M_{3n+1}(Y)$を考えると，そこに自然に定まる代数的 2 形式の核の収縮を与える射$f\colon M_{3n+1}(Y) \to Z(Y)$が存在し，その像$Z(Y)$が上記の 8 次元の上記 K3 型の射影的既約シンプレクティック多様体の完備族を与えることがわかっている（Lehn-Lehn-Sorger-van Straten, 2014）．このような完備族の構成は，偶然の産物ではなく，4 次元 3 次超曲面Yの連接層の導来圏が$\mathcal{D}^b(Y) = \langle \mathcal{A}_Y, \mathcal{O}_Y(-2), \mathcal{O}_Y(-1), \mathcal{O}_Y \rangle$なる半直行分解を持つことと関連している．$F(Y)$や$Z(Y)$は Kuznetsov 圏$\mathcal{A}_Y$の対象をパラメータづけする空間とみなすことができ，さらに，射$f\colon M_{3n+1}(Y) \to Z(Y)$は Kuznetsov 圏への射影$\Pi\colon \mathcal{D}^b(Y) \to \mathcal{A}_Y$から誘導される射であることもわかっていた (Addington-Lehn 2014)．このような一般的なフレームワークのもとでは，4 次元 3 次超曲面Y上のあらゆる安定層のモジュライ空間に対して，その Kuznetsov 圏への射影をパラメータづけする空間を考えるとどうなるか，ということが自然な問題となる．

２．研究の目的

そこで，本研究では，4 次元 3 次超曲面Y上の安定層で，Hilbert 多項式が$5n+2$となるもののモジュライ空間の中で，5 次の正規有理曲線上の$\mathcal{O}(1)$を含む既約成分$M_{5n+2}(Y)$を考え，そのメンバーFの Kuznetsov 射影$\Pi(F)$をパラメータづけする空間を具体的に構成することを目指した．特に，捻れ 3 次曲線の場合との類似性の追求の観点から，“射$f_5\colon M_{5n+2}(Y) \to Z_5(Y)$”の存在を仮設し，その代数幾何学的な叙述を与えようとした．なお，本研究は，ドイツ Mainz 大学の Manfred Lehn 氏および Duco van Straten 氏との共同研究である．

３．研究の方法

もしも射$f_5\colon M_{5n+2}(Y) \to Z_5(Y)$が存在したとすると，$Z_5(Y)$の超平面直線束の$f_5$による引き戻しは，$M_{5n+2}(Y)$上の普遍層$\mathcal{F}$の相対 Kuznetsov 射影$\Pi(\mathcal{F})$に付随する行列式直線束$\mathcal{L}$と$\mathrm{Pic}(Y)$の中で互いに有理数倍の関係になるはずである．そこで，この行列式直線束$\mathcal{L}$の分析を軸にして，空間$Z_5(Y)$の存在を示すアプローチをとった．最も理想的な議論の道筋は，行列式直線束$\mathcal{L}$が半豊富（ある整数倍が大域切断で生成される）となり，それに付随する射として$f_5\colon M_{5n+2}(Y) \to Z_5(Y)$が構成できる，というシナリオである．コホモロジー環での交点理論による簡単な計算によって，$Z_5(Y)$は 16 次元であることがわかり，$M_{5n+2}(Y)$の次元も 16 となることから，f_5は generically finite になるべきであることがわかる．さらに，f_5はYの超平面切断に含まれる層の軌跡として与えられる因子$D \subset M_{5n+2}(Y)$の収縮を与える双有理射になると強く疑われた．

４．研究成果

上記の目的・方法に沿った形で，まずは，モジュライ空間$M_{5n+2}(Y)$上，Kuznetsov 射影された普遍族に対応する行列式直線束$\mathcal{L}$の切断をたくさん作る問題を考えた．これを達成するには，Y上の連接層（より一般には，連接層の複体）Eであって，直交性条件$\chi(E \otimes \Pi(F)) = 0$を満たすものを取るごとに，行列式直線束$\mathcal{L} \cong Rp_*(q^*E \otimes \Pi(\mathcal{F}))$の有理切断$\theta_E$が構成される (Knutsen-Mumford)．もしも，$Rp_*(q^*E \otimes \Pi(\mathcal{F}))$が$M_{5n+2}(Y)$上の長さが 2 の複体と擬同型であれば，$\theta_E$は$\mathcal{L}$の大域切断になる（いわゆる“一般化されたテータ関数”）．このEを，しばしば test object と呼ぶ．最初に模索したのは，与えられた各点$[F] \in M_{5n+2}(Y)$に対して，θ_Eが$[F]$で 0 にならないようなEの取り方を見つけることである．もしも，Yが非常に一般 (very general)，すなわち，Yの代数的サイクルの数値類の空間が，コホモロジー環$H^*(Y, \mathbb{Q})$の中で，超平面切断の類で生成されるならば，数値的 K 群の階数は 4 になる．$\Pi(F)$が$\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Y(-1), \mathcal{O}_Y(-2)$と Hom に関して直交するという条件と，直交性条件$\chi(E \otimes \Pi(F)) = 0$によって，Kuznetsov 圏$\mathcal{A}_Y$の数値的 K 群の中での test object の類は，定数倍の差を除いてただ一つに定まる．これは，非常に一般のYに対応する$Z_5(Y)$

のピカール群$\mathrm{Pic}(Z_5(Y))$の階数が 1 になるべきであるとの観測と一致している．具体的な test object Eの取り方は，捻れ 3 次曲線上の適当な次数の直線束であったり，適切な length と適切な自然数mを固定した時の，Yの 0 次元部分スキームZのイデアル層のツイスト$I_Z(m)$などいくつもの取り方がある．Macaulay2 などの計算機代数計算の助けを借りながら，$[F] \in M_{5n+2}(Y)$に対応するEの良い取り方を模索した．

しかし，検討を進めていくうちに，$\mathrm{Supp}(F)$が$Y \subset \mathbb{P}^5$の超平面切断に含まれてしまうと，どのように工夫してEをとっても，θ_Eが$[F]$で 0 になってしまう，そこで，Yの超平面切断に含まれる（滑らかな）5 次有理曲線の普遍族$D \subset M_{5n+2}(Y)$を具体的に記述し，そこに行列式直線束$\mathcal{L}$を制限したものを理論的に計算した．その結果は，制限した直線束が負の次数を持つというものであった．$D \subset M_{5n+2}(Y)$は因子であるから，これはDが$\mathcal{L}$の固定部分になっていることを示唆する．この固定部分を取り除く方法を色々と模索したが，上述の通り，モジュライ空間とモジュライ関手の表現可能性による同一視の下では，行列式直線束$\mathcal{L}$は Kuznetzov 圏への射影から自然に定まるものであるので，人為的な変更の余地はあまりない．ただし，Kuznetsov 圏$\mathcal{A}_Y$の導来圏$\mathcal{D}^b(Y)$への部分三角圏としての埋め込みの方法はただ一通りではない．別な半直交分解の取り方として，$\mathcal{D}^b(Y) = \langle \mathcal{O}_Y(-2), \mathcal{O}_Y(-1), \mathcal{A}_Y, \mathcal{O}_Y \rangle$なる半直交分解に対応する射影関手$\Pi' : \mathcal{D}^b(Y) \to \mathcal{A}_Y$は別のモジュライ関手，従って，別の行列式直線束$\mathcal{L}'$を誘導する．以前$\mathcal{L}$に対して行ったのと同じ考察をこの$\mathcal{L}'$に対して行ったところ，因子$D \subset M_{5n+2}(Y)$の一般の点の上で消滅しない大域切断が存在することが（実験的に）確かめられた．さらに，次の定理を示すことができた．

<u>**定理**</u> (1) 任意の$F \in M_{5n+2}(Y)$に対して$H^0(F) = \mathbb{C}^2, H^1(F) = 0$.

(2) 安定層$F \in M_{5n+2}(Y)$が大域切断で生成されるならば，$\Pi'(F)$は階数が 9 のねじれのない層になる．さらに，一般のFに対しては$\Pi'(F)$は slope-stable になる．

（なお，この定理に関しては，2019 年 6 月に Zürich の ETH で行われた国際研究集会"Japanese-European Symposium on Symplectic Varieties and Moduli spaces"での招待公演で発表を行った）．このように書くと，構成したい空間$Z_5(Y)$は階数 9 の slope-stable な層のモジュライ空間（の既約成分）として実現されそうにも見えるが，状況はそう簡単ではない．定理の(1)は安定層$F \in M_{5n+2}(Y)$が 1-regular であることを意味する．しかし，一般的にFが 0-regular になることは証明ができない．実際，5 次有理曲線の退化を注意深く考えることで，$M_{5n+2}(Y)$の層であって，大域切断で<u>生成されない</u>例が作れてしまう．このようなFに対しては$\Pi'(F)$は長さが 2 の本当の複体になってしまうのである．

大域切断で生成されない最も"一般的な"層の例は，4 次元 3 次超曲面Yの線形切断として得られる 3 次曲面（で通常 2 重点を持つもの）上に台を持っていた．これは，既に出てきた，超平面切断に台を持つFの軌跡Dと同様に，Yの$\mathbb{P}^3$での切断に台を持つFの軌跡Bへと我々の興味を向かわせた．そこで，行列式直線束$\mathcal{L}'$の切断を調べることにした．軌跡Bの一般の点$[F]$で 0 にならない切断を便利な test object の選択によって作ることができなかったので，軌跡Bの普遍族を具体的に構成し，直線束$\mathcal{L}'$のBへの制限を求めると，これも次数が負になることがわかったのである．軌跡BはDとは違って大きな余次元を持つ．モジュライ空間$Z_5(Y)$の存在を強く信じるならば，この直線束$\mathcal{L}'$の基点の軌跡（の一部分）であるBは，まずフリップ，あるいはフロップのような小さな双有理改変を経ることで解消され，$\mathcal{L}'$の狭義変換が半豊富になる，というような現象を想定させる．実際，この研究で考えているのは，一般のYに対してはピカール数が 2 となるはずの多様体$M_{5n+2}(Y)$の上で，豊富直線束$\mathcal{A}$からスタートして可動錐の中を$\mathcal{L}'$へと移動する際の，いわゆる壁越え現象 (wall-crossing phenomena) を観察しているのであり，このような場合，極小モデルプログラムでおなじみの，有限回のログフリップの後に因子収縮またはファイバー空間が現れる，というような現象が起こるのが一般的だからである．

このような曲折を経て，5 次有理曲線であって，3 次曲面に含まれるようなもののなすモジュライ空間について詳しく研究する必要が出てきた．本研究期間に得られた最後の成果はこのモジュライ空間に関してのものであり，（大雑把に言って）3 次曲面の完備線形系$\mathbb{P}(\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3))^*)$上の普遍族に対して，それらに含まれる 5 次有理曲線の族をパラメータづけする相対的なモジュライ空間のコンパクト化が，ある種の quiver の表現に対応する GIT 商の形に表されそうだということがわかったことである．この GIT 商の詳細な記述は軌跡$B \subset M_{5n+2}(Y)$の幾何学について十分な情報を与えると見られるばかりではなく，それ自身が古典代数幾何の興味に発した問題であり，モジュライ空間の記述が完成すれば，それ自身独立の定理となるであろう．

ここで科研費の期間は終了したが，今後もこの問題の研究は継続していく計画である．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計1件（うち招待講演　1件／うち国際学会　1件）

１．発表者名 Yasunari Nagai
２．発表標題 Rational normal quintics on a cubic 4-fold and related coherent sheaves
３．学会等名 Japanese-European Symposium on Symplectic Varieties and Moduli Spaces, Fourth Edition（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考