

令和 5 年 6 月 14 日現在

機関番号：11501

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2022

課題番号：17K05215

研究課題名（和文）ボトルネック構造を持つ空間の幾何解析

研究課題名（英文）Geometric analysis for non-symmetric generators on Riemannian manifolds

研究代表者

石渡 聡 (Ishiwata, Satoshi)

山形大学・理学部・准教授

研究者番号：70375393

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,500,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、非コンパクトリーマン多様体の連結和上の幾何解析について研究を行った。特に熱核の長時間挙動のシャープな評価、ポアンカレ定数のシャープな評価を得ることに成功した。これらは従来の幾何解析で性質の良い空間では詳しく調べられてきた対象であるが、本研究において適切な仮定のもと、最良の評価を得ることに成功した。本研究は主としてドイツ Bielefeld大学の Alexander Grigor'yan 教授、アメリカ Cornell 大学の Laurent Saloff-Coste 教授との共同研究により遂行された。

研究成果の学術的意義や社会的意義

従来、トポロジーなどで使われていた空間の連結和という操作は幾何解析学とは相性が悪く、研究が進んでいなかった。本研究ではこの連結和という解析的には扱いにくい対象上の解析にチャレンジし、適切な仮定のもと、最良の結果を得た。この結果により、例えば結節点のあるような物体の中をランダムに動く粒子や信号がどちらに動きやすいか？という問題についての論理的な根拠を与え、従来よりも効率のよいシステムの開発に貢献することができる。

研究成果の概要（英文）：In this research project, we investigate geometric analysis on a connected sum of non-compact Riemannian manifolds. In particular, we obtain optimal estimates of the long time behavior of the heat kernel and the Poincaré constant on manifold with ends. Almostly, the project was done as a joint work with Professor Alexander Grigor'yan from Bielefeld University in Germany and Professor Laurent Saloff-Coste from Cornell University in the US.

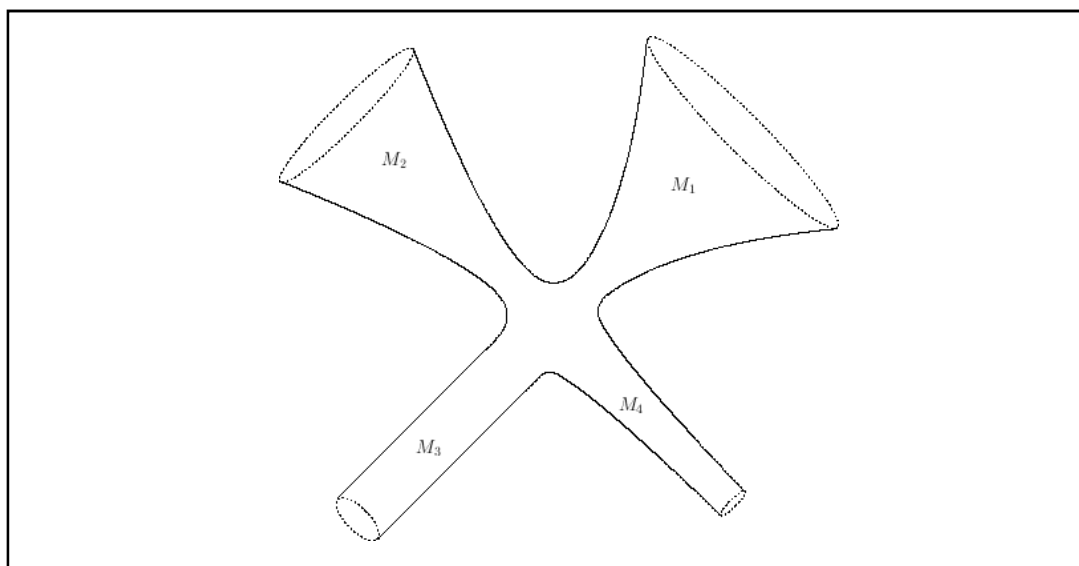
研究分野：幾何解析学

キーワード：熱核 ポアンカレ定数 連結和

1. 研究開始当初の背景

非コンパクトリーマン多様体上の幾何解析学は、熱核の長時間挙動やスペクトルの評価、調和関数の挙動などが詳しく調べられてきた。特に、1980年代 Li-Yau により、Ricci 曲率が非負である多様体上の熱核がガウス型評価を持つことを証明した研究以降、多くの研究者により熱核の評価や関数不等式の研究が行われ、1990年代に Grigor'yan と Saloff-Coste はそれぞれ独立に証明した熱核がガウス型評価を持つことと、ポアンカレの不等式と体積2倍条件、放物型ハルナックの不等式が同値であるという事実は多様体上の幾何解析の研究が、空間の確率論的性質、解析学的性質、幾何学的性質を結びつける重要な結果として現在でも知られている。これらはその後さらに Strum により距離空間上に拡張された。この事実により対称性の高いよい空間では例えば quasi-isometry によるポアンカレ不等式、体積2倍条件の安定性から熱核がガウス型評価を持つことが得られるなど、これらの解析的な構造が詳しく調べられてきた。

一方、従来トポロジーなどで用いられてきた連結和という操作は、解析学とは相性が悪く、研究がすすんでいなかった。例えば2つのエンド間の熱核はボトルネック構造により通常よりも小さくなる(ボトルネック効果)は知られていたが、定量的な評価は知られていなかった。また、1980年代には Molchanov らによって連結和は Liouville 条件(有界調和関数は定数のみである)を持たないことを証明し、連結和は調和解析的にユークリッド空間などとは異なることが知られていたが、詳しい解析はすすんでいなかった。



連結和の例

2. 研究の目的

本研究では従来取り扱いの困難であった連結和上の幾何解析の構築についてチャレンジし、ユークリッド空間などの性質のよい空間では詳しく調べられていた熱核の挙動やスペクトルの評価、調和関数の挙動などを連結和ではどうなっているのかを解明することを目的とする。Grigor'yan, Saloff-Coste の定理(熱核がガウス型評価、ポアンカレ不等式+体積2倍、放物型ハルナック不等式の同値性)と同様な関係を、連結和の場合にも得ることを目的としている。さらに応用として、これらの研究により、例えば結節点を持つような物質内をランダムに動く粒子や信号がどちらに行きやすいか、の論理的な根拠を与え、生物学や材料科学において従来よりも高効率なシステムの開発を最終的な目的としている。

3. 研究の方法

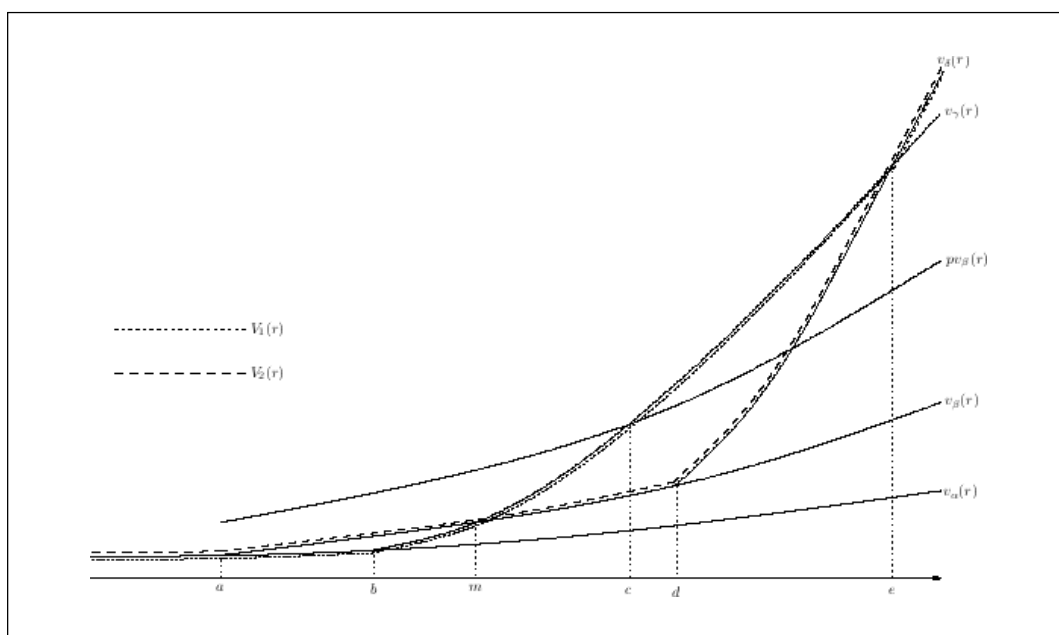
幾何解析学の専門家であるドイツ Bielefeld 大学の Alexander Grigor'yan 教授、アメリカ Cornell 大学の Laurent Saloff-Coste 教授に研究協力者を依頼し、彼らとの共同研究により遂行した。また、連携研究者として早稲田大学の熊谷隆教授、大阪大学の太田慎一教授を依頼し、確率論や幾何学の最新情報を入手して研究を行う。また、幾何解析学、確率論の関連図書による基礎的事実の確認、関連研究会への参加により各分野の専門家からの最新情報の入手により研究を遂行した。

4. 研究成果

連結和上の熱核の長時間評価

本研究ではまず多様体の連結和上の熱核の挙動を考察した。研究の結果、未解明であった連結和が parabolic な場合（ブラウン運動が再帰的な場合）に熱核のシャープな評価を得た。この結果は論文（Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (2018)）に掲載された。また、2022年にオンラインで開催され ICM（国際数学会議）2022の Saloff-Coste 氏による講演（https://www.youtube.com/watch?v=Xbh-l_pckc8&t=112s）で紹介されるなど、幾何解析学における最新の研究成果として高く評価されている。多様体の連結和上の熱核は、各エンド（枝の部分）に時刻 t までにヒットする hitting probability により各エンド上の Dirichlet 熱核を用いて分解することができる（Grigor'yan, Saloff-Coste, 2009）。しかしこの分解では中心部分の on-diagonal な熱核の評価が必要で、この部分に連結和の global な幾何構造が反映する本質的な部分であると考えられる。本研究の結果、連結和の中心部分（連結部分）における熱核の対角成分の値が、non-parabolic な場合は体積増大度が最も小さいエンドが熱核を決定するのに対し、parabolic な場合は体積増大度が最も大きいエンドが熱核を決定することを明らかにした。この結果を熱核の分解に代入することにより、off-diagonal な場合を含めた熱核全体のシャープな評価を得ることができるようになった。

一方で、本研究で得られた熱核の評価は体積増大度が最も大きいエンドは変わらない、といった条件（critically ordered condition）というやや技術的仮定の下でえられており、将来的にはこのような仮定をはずし、parabolicity または non-parabolicity、relatively connected annuli condition、といった自然な状況の下での一般化が期待される結果である。



Critically ordered condition がないエンドの例

連結和上のスペクトルの評価

「1 研究開始当初の背景」で述べたように、熱核の評価はスペクトルの評価などと深い関係にあることから、自然な問いとして連結和上のスペクトルの評価も求められるのではないかと、いう着想に至り、連結和の中心部分の距離球のノイマンラプラシアン第一固有値の逆数として定義されるポアンカレ定数について研究を行った。ポアンカレ定数は関数の分散とディリクレエネルギーの比としても定義され、さまざまな不等式を示す際に重要な役割をもつ量（不等式）である。研究の結果、最良な評価を得た。この結果、ポアンカレ定数は体積増大度が 2 番目に大きいエンドのみポアンカレ定数の評価を決定するというまったく新しい事実を解明した。この結果から、ポアンカレ不等式の成否、体積 2 倍条件の成否をそれぞれ持つような空間を自由自在に作り出すことが可能になり、多様体上の解析学（特に調和解析）に大きな影響を与えている。この結果は論文(Proceedings of the London Mathematical Society(2023))に掲載された。この研究は私の着想が基になっているため私が主導的な役割を担当し、引き続き Grigor'yan 氏、Saloff-Coste 氏との共同研究により得られた。この結果の証明には前述の熱核のシャープな評価とともに、Kusuoka-Stroock が、熱核のガウス型評価からポアンカレ不等式を導いた方法を連結和の場合に適用して行われた。本研究結果では、中心部分の半径が異なる距離球におけるポアンカレ定数から、半径が同じ距離球におけるポアンカレ定数を得ることに成功している。これは体積 2 倍条件をもつ空間の場合は距離球の Whitney covering とよばれる被覆をとり、半径が異なるポアンカレ定数を用いて半径が同じ距離球のポアンカレ定数を評価する手法であったが、

本研究ではこれを連結和（一般には体積 2 倍条件をもたない）に拡張し、同様の結果（半径が同じ距離球のポアンカレ定数の評価）を得ることに成功した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Alexander Grigor'yan, Satoshi Ishiwata, and Laurent Saloff-Coste	4. 巻 3
2. 論文標題 Geometric analysis on manifolds with ends	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Advances in Analysis and Geometry	6. 最初と最後の頁 325 ~ 344
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/9783110700763-011	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Ishiwata Satoshi, Kawabi Hiroshi, Namba Ryuya	4. 巻 25
2. 論文標題 Central limit theorems for non-symmetric random walks on nilpotent covering graphs: Part I	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Electronic Journal of Probability	6. 最初と最後の頁 1 ~ 46
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1214/20-EJP486	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Ishiwata Satoshi, Kawabi Hiroshi, Namba Ryuya	4. 巻 online
2. 論文標題 Central Limit Theorems for Non-Symmetric Random Walks on Nilpotent Covering Graphs: Part II	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Potential Analysis	6. 最初と最後の頁 1 ~ 40
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11118-020-09851-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 石渡聡	4. 巻 71
2. 論文標題 非コンパクトリーマン多様体上の熱核評価 - 最近の発展 -	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 数学	6. 最初と最後の頁 77-92
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Alexander Grigor'yan, Satoshi Ishiwata, L. Saloff-Coste	4. 巻 113
2. 論文標題 Heat kernel estimates on connected sums of parabolic manifolds	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal de Mathematiques Pures et Appliquees	6. 最初と最後の頁 155-194
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.matpur.2018.03.002	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Satoshi Ishiwata	4. 巻 20
2. 論文標題 Can one observe the bottleneckness of a space by the heat distribution?	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Mathematical Physics and Computer Simulation, Volgograd State University	6. 最初と最後の頁 77-88
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Grigor'yan Alexander, Ishiwata Satoshi, Saloff Coste Laurent	4. 巻 -
2. 論文標題 Poincaré constant on manifolds with ends	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Proceedings of the London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/plms.12522	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計9件 (うち招待講演 9件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 石渡聡
2. 発表標題 多様体の離散近似
3. 学会等名 オンライン勉強会：機械学習の数理 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 石渡聡
2. 発表標題 Heat kernel estimates on connected sums of parabolic manifolds
3. 学会等名 Hokkaido University online seminar (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Satoshi Ishiwata
2. 発表標題 Geometric analysis on manifolds with ends
3. 学会等名 Himeji Conference on Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 S. Ishiwata
2. 発表標題 Poincare constant on manifold with ends
3. 学会等名 Analysis and PDEs on Manifolds and Fractals (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Satoshi Ishiwata
2. 発表標題 Poincare constant on manifolds with ends
3. 学会等名 2018 Spring Probability Workshop, Institute of Mathematics, Academia Sinica (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Satoshi Ishiwata
2. 発表標題 Poincare Inequality on manifolds with ends
3. 学会等名 Analysis and PDEs on Manifolds (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Satoshi Ishiwata
2. 発表標題 Poincare Inequality on manifolds with ends
3. 学会等名 Global properties in potential theory of continuous and discrete spaces (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Satoshi Ishiwata
2. 発表標題 Poincare Inequality on manifolds with ends
3. 学会等名 Cornell University Probability seminar (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Satoshi Ishiwata
2. 発表標題 Poincaré constant on manifolds with ends
3. 学会等名 Open Japanese-German conference on stochastic analysis and applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	グレゴリアン アレキサンダー (Grigor'yan Alexander)		
研究協力者	サロフコスト ロラン (Saloff-Coste Laurent)		
連携研究者	熊谷 隆 (Kumagai Takashi) (90234509)	早稲田大学・理工学術院・教授 (32689)	
連携研究者	太田 慎一 (Ohta Shinichi) (00372558)	大阪大学・大学院理学研究科・教授 (14401)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------