

令和 4 年 5 月 29 日現在

機関番号：24506

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K05217

研究課題名(和文)高次元の曲面と部分多様体の表現公式とその応用

研究課題名(英文)The representation formulas for a surface of higher codimension and a submanifold and their application

研究代表者

守屋 克洋(Moriya, Katsuhiko)

兵庫県立大学・理学研究科・教授

研究者番号：50322011

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：曲面の具体例を構成する方法について研究した。石鹸膜に対応する数学的对象としての4次元ユークリッド空間内の曲面(極小曲面)について、与えられたものから新たなものを構成する方法(変換)について、新たな方法を得た。より一般に4次元ユークリッド空間内の曲面について知られていた表現公式や変換を、 $n$ 次元ユークリッド空間内の曲面に拡張した。3次元球面内の極小曲面について知られていた変換を、 $n$ 次元球面内の曲面の変換に拡張し、とくに極小曲面の場合は、極小曲面の変換になっていることを発見した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

一般に微分方程式の解を全て求めることは難しい。代わりに、解が一つ与えられているときに、それを用いて新たな解を構成できることがある。その理論を変換の理論という。変換の理論が作れるのは、関連する数学が十分発展している微分方程式である。極小曲面の微分方程式はそのような微分方程式のうちの一つである。本研究では、すでに知られていた極小曲面の微分方程式の変換の理論を、新たな計算方法を導入して、次元が高い場合に拡張した。これにより、すでに知られていた変換の新たな意味づけや、変換の理論の構成の可能性のある微分方程式の候補が得られた。

研究成果の概要(英文)：I studied how to construct a concrete example of a surface. We obtained a new method for constructing a new one from a given one for a surface which is a mathematical object corresponding to a soap film (minimal surface) in a four-dimensional Euclidean space. We have extended a representation formula and transforms that were known about general surfaces in 4-dimensional Euclidean space to surfaces in  $n$ -dimensional Euclidean space. We extended the transforms known for the minimal surface in the 3-sphere to the transforms of surfaces in the  $n$ -sphere, and found that if a given surface is minimal, then the transform is the transforms between minimal surfaces.

研究分野：微分幾何学

キーワード：変換 極小曲面 共形写像 調和写像 ウィルモア曲面

### 1. 研究開始当初の背景

四元数的正則幾何は1988年に導入された。これは、複素正則関数の高余次元版として、四次元ユークリッド空間内の曲面を、リーマン面から四次元ユークリッド空間への共形写像とみなして得られる四元数的正則性という概念で説明する。これが新しい研究方法を与え、その成果として、曲面の四元数的ワイエルシュトラス表現公式と、それをスピン束の切断で書くスピン表現公式が得られた。四元数的正則幾何は可積分系と関わりが深く、曲面の各種の変換や、四元数的ワイエルシュトラス表現公式を用いる、平坦なエンドのみを持つ極小トーラスの、付随する可積分系のスペクトル曲線からの構成を与えている。また、正則なツイスターリフトが存在する曲面として知られている超共形曲面が、四元数的正則幾何を用いて説明されている。これの高余次元版を、四元数的正則幾何を用いずに考えるという研究がされている。極小曲面の古典的なワイエルシュトラス表現公式は、長い歴史を持つ極小曲面の理論の発展に常に大きく貢献し、重要な例の構成を可能にしてきた。

研究代表者は四元数的正則幾何を用いて、極小曲面と超共形曲面の関係、曲面の四元数的ワイエルシュトラス表現公式と曲面の、四次元ユークリッド空間のツイスター空間へのリフトの関係、極小曲面に付随して現れる種々の可積分系に付随する極小曲面の変換を研究していた。

一方、クリフォード代数を用いて四元数的正則幾何を高余次元化し、(擬)リーマン多様体内の曲面のスピン表現公式を与え、そのベックルント変換を与えていた。

### 2. 研究の目的

本研究では、リーマン面から四次元ユークリッド空間への共形写像の四元数的正則幾何を高次元化もしくは高余次元化し、リーマン多様体の曲面もしくは部分多様体のワイエルシュトラス表現公式とスピン表現公式、リーマン面からリーマン多様体への等長はめ込みの性質とそのツイスターリフトの性質関係、与えられたエンドの均衡条件をみたくユークリッド空間内の極小曲面の構成を得ることを目的とする。より具体的には

- 四元数的正則幾何の高余次元版、
- 四元数的正則幾何の部分多様体版、
- 高余次元の曲面の性質とそのツイスターリフトの性質との関係
- エンドの均衡条件を満たす極小曲面

について研究を行う。

四元数的正則幾何は、リーマン面上の正則関数の理論をもとにしているもので、ベクトル束とその複素構造を基盤としている。古典的な曲面論とその延長上にある多くの研究のように、リーマン計量やリー群を基盤にしている研究と一線を画しており、研究の背景で述べたように今までの方法では不明であった結果を生み出している。本研究は四元数的正則幾何と同様にベクトル束と複素構造を基盤としているところに特色があり、より一般のリーマン多様体内の曲面や部分多様体に理論を拡張して、今までの方法では不明であった結果を得るところに独創性がある。

### 3. 研究の方法

研究会「対称空間論とその周辺」、2017年度幾何学シンポジウム、2018年RIMS共同研究(公開型)「低次元多様体モジュライ空間の幾何学」、金沢大学で行われた日本数学会2019年度秋季総合分科会に出席し、全般的な研究状況についての情報収集を行った。

四次元ユークリッド空間内の曲面の四元数的正則幾何の一部を、四元数をクリフォード代数に置き換えて高次元化した。部分多様体論・湯沢2017においてこの研究成果の一部を発表した。これを踏まえてさらに研究を進めてRIMS共同研究(公開型)「部分多様体の幾何学の深化と展開」において講演し、レスター大学で行われたm:iv mini-workshopにおいて、クリフォード代数を用いた高余次元の曲面の表現公式についての研究成果を講演した。その内容をまとめて数理解析研究所講究録で発表した。名古屋大で行われた第66回幾何学シンポジウムに出席し $tt^*$ 方程式と幾何学的量子化についての情報を得た。Polandのベンドレヴォ Conference Centerで行われた研究会「Dirac operators in differential geometry and global analysis」に出席し、 $G_2$ 多様体、associative多様体、coassociative多様体、並行な skew-symmetric torsion を持つ Riemann 多様体、Lagrange 部分多様体、佐々木多様多様体についての情報を収集した。研究代表者が過去に  $tt^*$  束について研究した際に用いた方程式を利用して、高次元球面内の極小曲面の変換についての論文を作成した。この成果を、日本数学会2021年度秋季総合分科会の幾何学分科会一般講演で発表した。アクセプトされた論文をオープン・アクセス化した。定義域がケーラー多様体の場合への拡張を研究し、極小はめ込みが満たすべき偏微分方程式を得た。

ユークリッド空間内の極小曲面の研究を、the Leverhulme Trust により助成されている研究プロジェクト「Minimal Surfaces: integrable systems and visualisation」のメンバーと行なった。また、このプロジェクトの一員としてスペインのグラナダ大で行われた研究会「Minimal Surfaces and related topics」を組織運営し、この研究会に招待した研究者の旅費を援助した。

また、この研究会に出席し情報収集を行った。プロジェクトのメンバー2人を筑波大学に招待して、ユークリッド空間内の極小曲面の変換とそれによる端部の変化について共同研究した。そのうちの1人を筑波大学に招待して、極小曲面のミュー・ダルブー変換について共同研究を行った。さらに、研究代表者がその研究者の所属する英国のレスター大学を訪問し、同じ研究を継続した。この研究を論文にまとめて投稿し、掲載に至った。

金沢大に出張し、共同研究者とツイスターリフトを用いた複素平面内のラグランジュ曲面の研究について議論した。大阪市大で行われた国際研究集会「Geometry of Submanifolds and Integrable Systems」において四元数的正則幾何を応用して得られた超共形写像の Schwarz の補題について講演した。上記のベンドレヴォの研究会において、ツイスターリフトと関連する Lagrange 部分多様体の構成に関する研究発表を行った研究者とその内容について議論した。

#### 4. 研究成果

3次元もしくは4次元ユークリッド空間内の曲面の表現公式として知られていたものが、クリフォード代数を用いることによって、曲面の持つスピン構造が反映される、一般次元のユークリッド空間内の曲面のスピン表現公式に拡張された。この表現公式により、曲面と対応するガウス写像の表現公式における役割が明確になった。また、ユークリッド空間以外の空間内の部分多様体の表現公式や具体例の構成、変換を研究する新たなアイデアを与えることとなった。

その一つの実現として、3次元球面内の極小曲面の具体例の構成を、クリフォード代数を用いて変換と解釈することに成功し、一般次元の球面内の一般の曲面の変換を定義するができた。この変換は一般次元球面内の極小曲面の変換を内包する。

適当な部分多様体の表現公式や変換についても同様なことが成り立つことが予想され、実際、傍証となるような計算結果は得られた。この研究を進めて論文にまとめて発表することが今後の課題である。

4次元ユークリッド空間内の極小曲面が4次元ユークリッド空間内のウィルモア曲面であることを利用し、対応する調和な共形ガウス写像を含む共形調和写像の族を作り、この族に属する写像を共形ガウス写像とするウィルモア曲面の族を構成することができた。この族を $\mu$ -ダルブー変換と呼ぶ。このウィルモア曲面は、3次元複素射影空間への正則写像をツイスター・リフトとしてもつ曲面となっており、従って超共形写像である。これは元の極小曲面の右随伴族に属する極小曲面と関連づけられることが分かった。また、 $\mu$ -ダルブー変換の極限は、元の曲面をウィルモア曲面と思った時の、随伴ウィルモア曲面であることが分かった。これらの研究により、極小曲面、ウィルモア曲面、曲面のツイスターリフトの関係がより詳細に判明した。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 7件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 5件）

1. 著者名 Moriya Katsuhiko	4. 巻 61
2. 論文標題 Polar varieties and bipolar surfaces of minimal surfaces in the n-sphere	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Annals of Global Analysis and Geometry	6. 最初と最後の頁 21 ~ 36
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10455-021-09793-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Leschke K., Moriya K.	4. 巻 162
2. 論文標題 The $\mu$ -Darboux transformation of minimal surfaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 manuscripta mathematica	6. 最初と最後の頁 537-558
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00229-019-01142-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 守屋克洋	4. 巻 2152
2. 論文標題 The spinor representation of conformal mappings of surfaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 16-19
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Katsuhiko Moriya	4. 巻 203
2. 論文標題 The Schwarz Lemma for Super-Conformal Maps	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Hermitian-Grassmannian submanifolds. Proceedings of the 20th International Workshop on Hermitian Symmetric Spaces and Submanifolds. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics	6. 最初と最後の頁 59 ~ 68
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-981-10-5556-0_6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Kazuyuki Hasegawa	4. 巻 154
2. 論文標題 An inclusive immersion into a quaternionic manifold and its invariants	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 manuscripta mathematica	6. 最初と最後の頁 527 ~ 549
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00229-017-0928-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kazuyuki Hasegawa	4. 巻 203
2. 論文標題 A Nearly Kahler Submanifold with Vertically Pluri-Harmonic Lift	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Hermitian-Grassmannian submanifolds. Proceedings of the 20th International Workshop on Hermitian Symmetric Spaces and Submanifolds. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics	6. 最初と最後の頁 49 ~ 58
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-981-10-5556-0_5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kazuyuki Hasegawa and Katsuhiro Moriya	4. 巻 27
2. 論文標題 Twistor Lifts and Factorization for Conformal Maps from a Surface to the Euclidean Four-space	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Advances in Applied Clifford Algebras	6. 最初と最後の頁 1243 ~ 1262
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00006-016-0728-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kazumi Tsukada	4. 巻 203
2. 論文標題 Transversally Complex Submanifolds of a Quaternion Projective Space	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Hermitian-Grassmannian submanifolds. Proceedings of the 20th International Workshop on Hermitian Symmetric Spaces and Submanifolds. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics	6. 最初と最後の頁 223 ~ 233
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-981-10-5556-0_19	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計8件（うち招待講演 7件 / うち国際学会 5件）

1. 発表者名 守屋克洋
2. 発表標題 単位球面内の極小曲面の変換
3. 学会等名 2021年度秋季総合分科会幾何学分科会一般講演
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 守屋克洋
2. 発表標題 The spinor representation of conformal mappings of surfaces
3. 学会等名 RIMS 共同研究（公開型）部分多様体の幾何学の深化と展開（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Katsuhiko Moriya
2. 発表標題 The spinor representation of a surface in an Euclidean space of arbitrary dimension
3. 学会等名 m:iv mini-workshop（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Katrin Leschke
2. 発表標題 Darboux transforms of minimal surfaces
3. 学会等名 Yorkshire Durham Geometry Days（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 守屋克洋
2. 発表標題 ベクトル束の複素構造と球面への調和写像
3. 学会等名 部分多様体論・湯沢2017 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Katsuhiko Moriya
2. 発表標題 The Schwarz lemma for conformal maps from the open unit disk into the Euclidean four-space
3. 学会等名 Geometry of Submanifolds and Integrable Systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kazuyuki Hasegawa
2. 発表標題 An inclusive immersion in a quaternionic manifold and its invariants
3. 学会等名 Differential Geometry, Banach center, Bedlewo, Poland (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Katrin Leschke
2. 発表標題 Transformation of Minimal Surfaces
3. 学会等名 Higgs Bundles, Harmonic Maps, and Integrable Systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

m:iv <a href="https://www2.le.ac.uk/projects/miv">https://www2.le.ac.uk/projects/miv</a>
---

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	長谷川 和志  (Hasegawa Kazuyuki)  (50349825)	金沢大学・学校教育系・教授    (13301)	

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	レシュケ カトリン  (Leschke Katrin)		
研究協力者	マルティン フランシスコ  (Martin Francisco)		
連携研究者	大仁田 義裕  (Ohnita Yoshihiro)  (90183764)	大阪市立大学・大学院理学研究科・教授    (24402)	



6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	加藤 信  (Kato Shin)  (10243354)	大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授   (24402)	
連携研究者	塚田 和美  (Tsukada Kazumi)  (30163760)	お茶の水女子大学・基幹研究院・教授   (12611)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Minimal Surfaces and related topics	開催年 2017年～2017年
---	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
英国	University of Leicester			
アイルランド	University College Cork			
スペイン	University of Granada			
ドイツ	Technical University of Munich			