

令和 4 年 6 月 7 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K05219

研究課題名(和文) ユークリッド空間の極小曲面およびミンコフスキー空間の平均曲率0曲面の大域的性質

研究課題名(英文) Global properties of minimal surfaces in Euclidean space and zero mean curvature surfaces in Minkowski space

研究代表者

藤森 祥一 (Fujimori, Shoichi)

広島大学・先進理工系科学研究科(理)・教授

研究者番号：00452706

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：3次元ユークリッド空間の極小曲面および3次元ミンコフスキー空間の平均曲率0曲面の大域的性質と特異点に関する研究を行った。3次元ユークリッド空間の周期的極小曲面の族の構成と極限について新しい結果を得た。また3次元ミンコフスキー空間の周期的平均曲率0曲面や向き付け不可能な極大曲面の新しい族を構成した。さらに、ワイエルシュトラス型表現公式をもつ曲面の解析的延長性について考察を行い、いくつかの新しい結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ユークリッド空間の周期的極小曲面は界面活性剤膜の数学的モデルであることが知られており、数学者だけでなく物理学者や化学者にとっても重要な研究テーマである。本研究では主に複素解析的手法を用いて周期的極小曲面の研究を行ったが、得られた結果は物理や化学の分野でも応用されることが期待される。一方、ミンコフスキー空間の平均曲率0曲面も同様の手法で研究を行ったが、こちらは特異点が現れるので、特異点論の発展にも寄与していると思われる。

研究成果の概要(英文)：The global properties of minimal surfaces in Euclidean space and zero mean curvature surfaces in Minkowski space were investigated. For periodic minimal surfaces in Euclidean 3-space, some new families were constructed and their limits were studied. For zero mean curvature surfaces in Minkowski 3-space, periodic surfaces and nonorientable surfaces were constructed. Moreover, analytic extensions for surfaces which possess Weierstrass type representation formulae were observed.

研究分野：微分幾何学

キーワード：極小曲面 極大曲面 平均曲率0曲面 ワイエルシュトラス型表現公式 解析的延長 特異点

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

本研究では 3 次元ユークリッド空間の極小曲面および 3 次元ミンコフスキー空間の平均曲率 0 曲面の大域的性質に関する研究を行った。また関連する曲面の解析的延長性に関する研究を行った。

3 次元ユークリッド空間の極小曲面は石鹸膜の数学的モデルであり、18 世紀頃から現在まで活発に研究が行われている。特に 19 世紀後半にワイエルシュトラスの表現公式と呼ばれる複素解析的データから曲面を構成する公式が発見されてからは理論が飛躍的に発展し、20 世紀後半からはこの表現公式を用いた極小曲面の大域的性質の研究も盛んに行われるようになった。

一方、3 次元ミンコフスキー空間の平均曲率 0 曲面は、空間的極大曲面、時間的極小曲面、およびそれらの混合型曲面に大別される。このうち空間的極大曲面についてはワイエルシュトラス表現公式と類似の公式が小林治氏によって 1980 年代に発見された。完備な空間的極大曲面は自明な例に限られることが知られているが、ある種の特異点を許容した上で大域的性質の研究が行われるようになった。特に折り目特異点と呼ばれる特異点のみを持つ空間的極大曲面は、そこから曲面を実解析的に延長すると拡張された部分が時間的極小曲面となり、結果として特異点のない混合型平均曲率 0 曲面が得られることがある。以上が研究開始時点における本研究テーマの背景である。

次に、本研究で具体的に扱う曲面について、研究開始当初の背景を述べる。

3 次元ユークリッド空間の極小曲面に関しては、ある種の二重周期的極小曲面が Meeks 族と呼ばれる三重周期的極小曲面の族の極限として得られることが分かっていたが、三重周期的極小曲面の族の退化極限の分類は未解決であった。また、二重周期的極小曲面や三重周期的極小曲面の構成について、Traizet や Connor-Weber によって開発された gluing という方法で、退化極限の近傍での曲面の族の存在が知られているが、照明には陰関数定理を用いているため、この族が退化極限の近傍からどれだけ離れられるかについては未解決であった。

3 次元ミンコフスキー空間の平均曲率 0 曲面に関しては、これまで自明な位相を持つ混合型平均曲率 0 曲面の例は多く構成されていたが、非自明な位相を持つ平均曲率 0 曲面は、三重周期的な埋め込みの 1 径数族が 1 つ知られてるのみであった。また、向き付け不可能な空間的極大曲面については、メビウスの帯型の曲面とクラインの壺から 1 点を除いた型の曲面の例が知られていたが、高種数の例は知られていなかった。

曲面の解析的延長については、3 次元ミンコフスキー空間の曲面や 3 次元ド・ジッター空間の平均曲率 1 曲面の場合にいくつかの結果が得られていたが、一般の曲面(あるいは多様体)に関する議論は確立されていなかった。

2. 研究の目的

本研究の目的は、上述の周期的極小曲面の分類に関する問題の解決や、新しい極小曲面および平均曲率 0 曲面、極大曲面の族の構成、そして曲面の解析的延長に関する一般論の確立である。解析的延長については、極大曲面と局所的には等長対応がある 3 次元ド・ジッター空間の平均曲率 1 曲面の例も考察する。これらの曲面は全てワイエルシュトラス型表現公式と呼ばれる公式を持つ。ワイエルシュトラス型表現公式とは、複素解析的データを用いて曲面を構成する公式であり、同じデータからユークリッド空間の極小曲面、ミンコフスキー空間の極大曲面、ド・ジッター空間の平均曲率 1 曲面を構成することができる。これらの曲面は局所的には共通の性質を持つが、曲面の周期条件が異なるために大域的な性質は大きく異なることに注意して研究を行う。

3. 研究の方法

- (1) 3 次元ユークリッド空間の極小曲面について：三重周期的極小曲面の退化極限として得られる極小曲面の分類を試みる。最初に Meeks 族と呼ばれる比較的良好な性質をもった(基本ピースが種数 3 の)三重周期的極小曲面の 5 径数族について考察し、その後一般の(基本ピースが種数 3 の)三重周期的極小曲面について考察する。また、新しい三重周期的極小曲面や二重周期的極小曲面の族の構成とそれらの退化極限の考察を試みる。二重周期的極小曲面の族については、Connor-Weber によって得られた退化極限の近傍の族の変形から考察を始める。
- (2) 3 次元ミンコフスキー空間の平均曲率 0 曲面について：新しい三重周期的平均曲率 0 曲面の族の構成を試みる。3 次元ユークリッド空間の 3 重周期的極小曲面の複素解析的データが数多く知られているので、これらのデータを 3 次元ミンコフスキー空間の空間的極大曲面に適

用して、折り目特異点のみをもつデータを探し、それを解析的に延長することで混合型の平均曲率 0 曲面の族を構成する。また得られた例の自己交叉性および退化極限として現れる曲面を考察する。

- (3) 3次元ミンコフスキー空間の向き付け不可能な空間的極大曲面について：高種数の例の構成を試みる。3次元ユークリッド空間の向き付け不可能な極小曲面の複素解析的データをもとにして、固定点のない反正則対合をうまく取ることで構成する。また、得られた曲面と同じ位相かつ同じ対称性を持つ曲面の一意性について考察する。特に周期問題の解の一意性について詳しく調べる。
- (4) 曲面の解析的延長について：一般論の確立を試みる。また、3次元ド・ジッター空間の平均曲率 1 曲面の例、特に基本的な例である「de Sitter catenoid」と呼ばれる曲面の解析的延長性について考察する。

4. 研究成果

- (1) 江尻典雄氏、庄田敏宏氏との共同研究で、3次元ユークリッド空間の三重周期的極小曲面に関する研究を行った。特に、基本ピースが種数 3 のコンパクト曲面となる場合について、退化極限として現れる曲面の分類を試み、「ジェネリックな退化極限」という仮定を設けることで、退化極限に現れる曲面の分類に成功した。また、新しい三重周期的極小曲面の 2 径数族を構成した。この 2 径数族は、最初に曲面の 4 径数族を与え、2次元の周期問題を中間値の定理と陰関数定理を用いて解くことで得た。これらの結果に関して論文を 2 本執筆した。2 本とも既に出版済みである。
Peter Conner 氏、Phillip Marmorino 氏との共同研究で、3次元ユークリッド空間の二重周期的極小曲面の 1 径数族を構成した。この 1 径数族は、Connor-Weber の曲面をもとにして、最初に曲面の 3 径数族を与え、2次元の周期問題を解くことで得た。またこの族の極限およびこの族を極限とする三重周期的曲面について考察した。これらの結果に関して論文を 1 本執筆した。この論文は現在投稿中である。
- (2) 3次元ミンコフスキー空間の平均曲率 0 曲面の新しい 1 径数族を構成した。この 1 径数族は、既に知られている 3次元ユークリッド空間の 3 重周期的極小曲面の複素解析的データを用いて構成した。また、この族の退化極限として現れる曲面を考察した。曲面の自己交叉性については、計算機で描画した曲面を見る限り自己交叉はなさそうであったが、数学的な証明は与えることができなかった。この結果に関して論文を 1 本執筆した。この論文は既に出版済みである。
Udo Hertrich-Jeromin 氏、國分雅敏氏、梅原雅顕氏、山田光太郎氏との共同研究で、平均曲率 0 曲面のガウス写像と 2 次曲面のクリストッフェル変換との関係について考察を行った。この結果に関して論文を 1 本執筆した。この論文は既に出版済みである。
- (3) 金田伸氏との共同研究で、3次元ミンコフスキー空間の任意種数の向き付け不可能な極大曲面を構成した。また、得られた曲面と同じ位相かつ同じ対称性を持つ曲面の一意性について考察したが、このことについては完全に解決することはできなかった。ただし、周期問題の解の一意性については、不等式を精密に評価することで証明することができた。この結果に関して論文を 1 本執筆した。この論文は掲載決定済みである。
- (4) 川上裕氏、國分雅敏氏、Wayne Rossman 氏、梅原雅顕氏、山田光太郎氏、Seong-Deog Yang 氏との共同研究で、曲面の解析的延長に関する研究を行った。一般論の展開と、上述の de Sitter catenoid と呼ばれる曲面の解析的延長性を決定した。この結果に関して論文を 2 本執筆した（7 名で 1 本、Yang 氏以外の 6 名で 1 本）。1 本は de Sitter catenoid の中でも特に例外型と言われる 2 つの曲面について、その解析的拡張の存在を証明したものであり、この論文は既に出版済みである。もう 1 本の論文では全ての de Sitter catenoid の解析的延長性を決定しており、この論文は現在投稿中である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Shoichi Fujimori, Yu Kawakami, Masatoshi Kokubu, Wayne Rossman, Masaaki Umehara, Kotaro Yamada	4. 巻 62
2. 論文標題 Analytic extension of exceptional constant mean curvature one catenoids in de Sitter 3-space	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematical Journal of Okayama University	6. 最初と最後の頁 179 ~ 195
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Shoichi Fujimori, Udo Hertrich-Jeromin, Masatoshi Kokubu, Masaaki Umehara, Kotaro Yamada	4. 巻 186
2. 論文標題 Quadrics and Scherk towers	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Monatshefte für Mathematik	6. 最初と最後の頁 249 ~ 279
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00605-017-1075-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Norio Ejiri, Shoichi Fujimori, Toshihiro Shoda	4. 巻 197
2. 論文標題 On limits of triply periodic minimal surfaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Annali di Matematica Pura ed Applicata	6. 最初と最後の頁 1739 ~ 1748
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10231-018-0746-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Norio Ejiri, Shoichi Fujimori, Toshihiro Shoda	4. 巻 35
2. 論文標題 A construction of a two-parameter family of triply periodic minimal surfaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Kobe Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 45 ~ 83
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shoichi Fujimori	4. 巻 78
2. 論文標題 Triply periodic zero mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 201 ~ 219
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shoichi Fujimori and Shin Kaneda	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Higher genus nonorientable maximal surfaces in the Lorentz-Minkowski 3-space	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Tohoku Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件 (うち招待講演 9件 / うち国際学会 8件)

1. 発表者名 Shoichi Fujimori
2. 発表標題 Zero mean curvature surfaces in Euclidean and Lorentz-Minkowski 3-space, I
3. 学会等名 Discussion meeting on zero mean curvature surfaces (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Shoichi Fujimori
2. 発表標題 Zero mean curvature surfaces in Euclidean and Lorentz-Minkowski 3-space, II
3. 学会等名 Discussion meeting on zero mean curvature surfaces (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Shoichi Fujimori
2. 発表標題 Zero mean curvature surfaces in Euclidean and Lorentz-Minkowski 3-space, III
3. 学会等名 Discussion meeting on zero mean curvature surfaces (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Shoichi Fujimori
2. 発表標題 Deformations of periodic minimal surfaces and their limits
3. 学会等名 2019 Langenhop Lecture and SIU Pure Mathematics Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shoichi Fujimori
2. 発表標題 Constant curvature tori of Joachimsthal type
3. 学会等名 Geometric shape generation (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Shoichi Fujimori
2. 発表標題 Limits of periodic minimal surfaces
3. 学会等名 Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 藤森祥一
2. 発表標題 3次元Lorentz-Minkowski空間の平均曲率0曲面について
3. 学会等名 合宿セミナー 2018 in 福山 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shoichi Fujimori
2. 発表標題 Quadrics and their Christoffel duals
3. 学会等名 International Workshop on Differential Geometric Aspects of Integrable Systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Shoichi Fujimori
2. 発表標題 Zero mean curvature surfaces of mixed causal type in the Lorentz-Minkowski 3-space
3. 学会等名 The third Japanese-Spanish workshop on Differential Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 藤森祥一, 金田伸
2. 発表標題 高種数の向き付け不可能な極大曲面について
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 川上裕, 藤森祥一	4. 発行年 2019年
2. 出版社 サイエンス社	5. 総ページ数 111
3. 書名 極小曲面論入門	

〔産業財産権〕

〔その他〕

藤森祥一のウェブページ https://home.hiroshima-u.ac.jp/fujimori/index-j.html
--

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
米国	Indiana University South Bend	University of Notre Dame	
韓国	Korea University		
オーストリア	ウィーン工科大学		