

令和 6 年 6 月 12 日現在

機関番号：33906

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2023

課題番号：17K05222

研究課題名(和文) 最小跡に関連する諸問題と新たな応用を目指す研究

研究課題名(英文) Study of several problems related cut locus and aimed its new applications

研究代表者

伊藤 仁一 (Itoh, Jin-ichi)

椋山女学園大学・教育学部・教授

研究者番号：20193493

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：最小跡に関する総合的な研究として以下の5つの分野に関してバランスよく研究を進めた。(A) Jacobi の最終定理の一般化に関しては、論文公表した。(B) 最小跡の構造と性質の研究に関しては、一般の多面体の最小跡やグラフの最小跡を定義した。(C) 最小跡に関連する諸問題(最遠点集合、擬測地線、距離関数の臨界点等)の研究に関しては、興味深い結果の公表を行い、その後も新たな問題や進展が続いている。(D) 最小跡を応用する問題として、特異な形状の細胞の特徴付け等を考え始めた。(E) 関連する他の計量における最小跡の考察についても、結果を得るには今少しの時間が必要である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

最小跡の研究は20世紀初頭のポアンカレの論文によって始まり、その後の長い研究の歴史がある。その進展に貢献するものといえる。また、楕円面上の測地線の挙動からその第一共役跡の特異点に関してはヤコビの最終定理として知られており、その一般次元への拡張を与えたことになる。応用面に関しても、多面体の unfolding や Voronoi 分割等の計算機科学との関連があり、また、本研究中に始めた、特異形状の細胞を特徴付けるのにも将来的に役立つ可能性があり意義深いと思われる。更に、定義が単純であることから数学教育の分野にもその有用性が期待される。

研究成果の概要(英文)：As a comprehensive study on the cut locus, we conducted a well-balanced study in the following five areas. (A) A paper on the generalization of Jacobi's Last Theorem was published. (B) For the study of the structure and properties of cut loci, we defined the minimum traces of general polyhedra and the minimum traces of graphs. (C) Interesting results have been published in the study of problems related to cut locus (farthest point sets, pseudogeodesics, critical points of distance functions, etc.), and new problems and developments have continued. (D) The problem of applying the cut locus was to characterize cells with peculiar shapes. (E) As for the consideration of the cut locus in other related metrics, some time is now needed to obtain the results.

研究分野：数物系科学・数学・幾何学

キーワード：最小跡 測地線 第一共役跡 距離関数 多面体 全曲率

1. 研究開始当初の背景

最小跡の研究は、H.Poincare による曲面の位相との関連から始まり、その後の長く研究され続けてきた。近年、最小跡までの距離関数の Lipschitz 性を示し、Ambrose の問題が曲面で肯定的に解決し、楕円面の一般の点の最小跡の決定し、Jacobi の定理(共役跡の尖点は4つ)に完全な証明を与え一般次元への拡張を試み、その際の特異点を以前の研究で決定していた。

2. 研究の目的

本研究は、以下に述べるように着実に進展してきている最小跡に関連する研究を、この機会に更なる発展を目指すものである。

次の5つのテーマ (A) Jacobi の最終定理の一般化と二次曲面的な現象、(B) 最小跡の構造と性質の研究(第2最小跡に関しても考察する)、(C) 最小跡に関連する諸問題(最遠点集合、擬測地線、距離関数の臨界点等)の研究、(D) 最小跡を応用する問題(PL多様体の最小跡、多面体を平らに折り畳む問題、多面体の unfolding 等)、(E) 関連する他の計量における最小跡の考察、に分け、(A)と(C)は益々の発展を、(B)と(D)は特に新たな研究方向が含まれており、これらをバランスよく発展させることを目的とする。

3. 研究の方法

(1) 現段階である程度得られている多くの結果と、ある程度論文にまとめてある結果を、修正して発表する。

(2) 各テーマごとに次のように計画した。

(A) Jacobi の定理の一般化の論文を発表する。(B) 多面体(最短線が分岐する可能性がある)の最小跡の定義を行う。第2最小跡に関しても考察する。(C) 距離関数の臨界点を最小跡との関連で調べる。得られている結果を発表し、更に新しい性質を見出す。(D) 凸でない多面体を平らに折り畳むことや多面体の展開に最小跡を用いて考察する。(F) フィンズラー計量の最小跡等について考察する。

(3) 本研究は多くの共同研究から成り立っており、共同研究者と直接会っての詳細な議論が必要不可欠であり、また多くの他分野との関連も深く、それらの研究者の研究協力や専門知識の供与を必要であり、そのための出張を計画した。

4. 研究成果

(1) 研究期間内に15編の学術論文を公表した。当初の予定よりおこなっているものもあるが、7年間の数学の論文数としては十分な成果と言える。また、海外で7回、国内で28回の研究発表を行った。

(2) 各テーマごとに次のような結果が得られた。

(A) に関しては、Jacobi の定理の一般化に関してその特異点が D_{4^+} ラグランジュ特異点となることが以前の研究で分かり、論文を公表できた(清原との共同研究)。楕円面の第1共役跡の場合のように複素射影空間に近いケーラー・リュービュ多様体に対しても第1共役跡の特異点の形状を調べる問題が残っていることに気付いた。

(B) に関しては、非凸多面体において測地線が分岐する場合の最小跡の定義を考察し、その場合の最小跡とハンドル分解について議論し、論文にまとめている(吉安との共同研究)。グラフ(1次元単体複体)においても最小跡にあたる3種類の定義を考察し、論文にまとめている(S.Prasadとの共同研究)。

(C) に関しては、以前公表した論文(Every point is critical)の第二弾として、臨界点とする距離関数の個数と曲面の位相との関連を示す論文(With respect to whom are you critical?)を公表できた(C.Vilcu, T.Zamfirescu と共同研究)。空間開曲線の曲率と捻率の2乗和の平方根の積分を最小となる曲線(最も簡単な場合には螺旋)を調べた最初の論文を公表し、更に始点終点が一致している場合に、下限が3となり興味深い曲線の極限として得られることが概ね分かり、詳細を検討している(榎本との共同研究)。新たな問題として、凸体において直径を与える2点の一方になる点を特徴付ける条件を調べ、論文にまとめ発表した(Y.Liping, C.Vilcu T.Zamfirescu との共同研究)。曲面の最小跡の長さや曲面の面積の間に等周不等式的な関係式が成立することが分かり、また、多面体の頂点の Steiner minimal tree の長さや最小跡の長さについても関係式がありそうで、議論を進めている(C.Vilcu との共同研究)。新たに部分多様体の最少跡に関する考察に進展が得られそうであり、ある部分多様体から最小跡までの距離関数が定数であるという条件のもとに ambient 空間の位相を制限することを考察し、概ブラシュケ問題の部分多様体版のような結果を期待している(S.Prasad との共同研究)。

(D) に関しては、凸多面体を連続的に平らに折りたたむことをその最小跡を用いて行うという最近の結果(奈良, Vilcu との共同研究)の拡張として、凸でない多面体に対しても原理的には最小跡を用いて連続変形出来そうなので検討したが、もう少し、時間が必要である。(B)により一

般の多面体の最小跡を扱うことが出来るようになったので、多くの細胞形状のデータから特異的な変位をしている細胞が持っている最小跡の構造を見つけだすことが出来るのではないかと期待したが、現在は中断状態である。

(E) に関しては、以前、フィンスラー計量でも最小跡がフラクタル集合となる計量の構成を行ったが、フラクタル集合にできるのは最小跡の端点のみであろうと思われ、その方向の研究も始めている(Sabau との共同研究)。部分多様体の最小跡に対しても同様の考察が可能かもしれない。

(3) 前回の科研費による研究に引き続いて、それを発展させる方向に研究を進めることが出来た。また、新たに始まった研究も多く今後も研究の継続が期待される。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計15件（うち査読付論文 13件 / うち国際共著 8件 / うちオープンアクセス 6件）

1. 著者名 S. Honda, N. Horio, J. Itoh, N. Nomura, S. Prasad	4. 巻 67
2. 論文標題 Six problems in intuitive geometry	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie	6. 最初と最後の頁 221-227
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 C. Nara, J. Itoh	4. 巻 67
2. 論文標題 Continuous folding of the surface of a regular simplex onto its facet	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie	6. 最初と最後の頁 251-262
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 伊藤仁一, 田中麻綾, 堀内菜智	4. 巻 16
2. 論文標題 大学生による数学探究活動の報告 - 秋山仁先生のメビウスフラワーに関連するいくつかの考察 -	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 椋山女学園大学教育学部紀要	6. 最初と最後の頁 91-97
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 J. Itoh, C. Nara	4. 巻 112
2. 論文標題 Continuous flattening of the 2-dimensional skeleton of a regular 24-cell	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 J. Geometry	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00022-021-00575-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Z. Abel, E. Demaine, M. Demaine, J. Ku, J. Lynch, J. Itoh, C. Nara	4. 巻 98
2. 論文標題 Continuously flattening of all polyhedral manifolds using countably infinite creases	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Comput. Geometry: Theory and Appl.	6. 最初と最後の頁 101773
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.comgeo.2021.101773	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 J. Itoh, J. Rouyer, C. Vilcu	4. 巻 62
2. 論文標題 Some inequalities for tetrahedra	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Beitrage fur Algebra und Geometrie	6. 最初と最後の頁 705-715
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 J. Itoh, K. Kiyohara	4. 巻 7
2. 論文標題 The Structure of the Conjugate Locus of a General Point on Ellipsoids and Certain Liouville Manifolds	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Arnold Math. J.	6. 最初と最後の頁 31-90
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40598-020-00153-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 J. Itoh, C. Vilcu, T. Zamfirescu	4. 巻 369
2. 論文標題 With respect to whom are you critical?	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Adv. Math.	6. 最初と最後の頁 107187, 1-15
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 J. Itoh, C.Vilcu, L.Yuan, T.Zamfirescu	4. 巻 75
2. 論文標題 Locating diametrial points	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Results in Math.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00025-020-01193-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Jin-Ichi Itoh, Joel Rouyer, Costin Vilcu	4. 巻 66
2. 論文標題 Polyhedra with simple dense geodesic	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Differential Geometry and its Applications	6. 最初と最後の頁 242-252
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Jin-ichi Itoh, Chie Nara	4. 巻 110
2. 論文標題 Continuous flattening of the 2-dimensional skeletons in regular simplexes and cross-Polytopes	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Geomtry	6. 最初と最後の頁 47
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00022-019-0504-0 Springer	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Kiyohara Kazuyoshi, Sabau Sorin V., Shibuya Kazuhiro	4. 巻 16
2. 論文標題 The geometry of a positively curved Zoll surface of revolution	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 International Journal of Geometric Methods in Modern Physics	6. 最初と最後の頁 1941003-1941003
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0219887819410032	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Chie Nara, Jin-ichi Itoh	4. 巻 2
2. 論文標題 Continuous flattening of extended bipyramids with rigid radial edges	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 The Proceedings from 7th International Meeting on Origami in Science, Mathematics and Education	6. 最初と最後の頁 561-571
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kazuyuki Enomoto, Jin-ichi Itoh	4. 巻 194
2. 論文標題 The total mixed curvature of open curves in E3	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Geometriae Dedicata	6. 最初と最後の頁 131-140
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Itoh, Jin-ichi; Ohtsuka, Fumiko	4. 巻 219
2. 論文標題 A natural generalization of regular convex polyhedra	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Topology and its Appl.	6. 最初と最後の頁 43-54
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計35件 (うち招待講演 9件 / うち国際学会 7件)

1. 発表者名 Jin-ichi Itoh
2. 発表標題 Cut locus and intuitive geometry
3. 学会等名 Geometry Seminar at IISER Kolkata (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Chie Nara
2. 発表標題 Continuous Folding of the Surface of a Regular Simplex onto its Facet
3. 学会等名 The 25th Indonesia-Japan Conf. on Discr. and Comput. Geometry, Graphs and Games 2023 (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 榎本一之
2. 発表標題 空間曲線の曲率の積分
3. 学会等名 第69回幾何学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 榎本一之
2. 発表標題 球面曲線の曲率の積分
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 奈良知恵
2. 発表標題 連続的平坦化：正24胞体の2次元スケルトン
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 伊藤仁一
2. 発表標題 講演「誰も知らない多面体の秘密 - 直観幾何学への誘い - 」
3. 学会等名 日本数学協会年次大会（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 伊藤仁一
2. 発表標題 誰も知らない多面体の秘密 -直観幾何学への誘い-
3. 学会等名 確率論と幾何学（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 伊藤仁一
2. 発表標題 折り紙テントと関連する諸問題
3. 学会等名 MIMS 現象数理学拠点共同研究集会「折紙を基盤とする数理と折紙工学への応用発展」
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 吉安徹
2. 発表標題 Cut loci for non-convex polyhedra
3. 学会等名 測地線及び関連する諸問題
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 C.Vilcu
2. 発表標題 Diametral points
3. 学会等名 直観幾何学 2021 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 吉安徹
2. 発表標題 非凸多面体の最小跡
3. 学会等名 直観幾何学 2021
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Jin-ichi Itoh
2. 発表標題 Reversing cube and Origami tent
3. 学会等名 International Symposium on Discrete Geometry and Convexity (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 伊藤仁一
2. 発表標題 折り紙テント(パート2)
3. 学会等名 MIMS 現象数理学拠点共同研究集会「折紙を基盤とする数理と折紙工学への応用発展」
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 伊藤仁一
2. 発表標題 直観幾何学への誘い
3. 学会等名 理工談話会（名城大学）（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 伊藤仁一
2. 発表標題 最小跡に関連する諸問題
3. 学会等名 応用特異点論ラボ・セミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 奈良知恵
2. 発表標題 高次元正軸多胞体の三角形面からなる2-スケルトンの連続平坦化
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 清原一吉
2. 発表標題 射影同値と可積分測地流
3. 学会等名 北大コロキウム（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 清原一吉
2. 発表標題 射影同値のエルミート版とHermite-Liouville多様体
3. 学会等名 測地線および関連する諸問題
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 伊藤仁一, 堀尾直文
2. 発表標題 折り紙テント
3. 学会等名 MIMS 文科省現象数理学拠点共同研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Jin-ichi Itoh, Chie Nara
2. 発表標題 Continuous flattening of the 2-dimensional skeleton in a regular simplex
3. 学会等名 21st Japan Conference on Discrete and Computational Geometry, Graphs and Games (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takashi Horiyama, Jin-ichi Itoh, Chie Nara
2. 発表標題 On 2-Dimensional Developments of a 4-Dimensional Hypercube and a Regular Pentachoron
3. 学会等名 21st Japan Conference on Discrete and Computational Geometry, Graphs and Games (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Chie Nara, Jin-ichi Itoh
2. 発表標題 Continuous flattening of extended bipyramids with rigid radial edges
3. 学会等名 7th International meeting on Origami in Science, Mathematics, and Education (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Naofumi Horio, Jin-ichi Itoh
2. 発表標題 Reversing cube with slits
3. 学会等名 7th International meeting on Origami in Science, Mathematics, and Education (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 奈良知恵, 伊藤仁一
2. 発表標題 N次元超立方体の正方形面からなる2-スケルトンの連続平坦化
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 清原一吉
2. 発表標題 On Finsler surfaces with constant flag curvature,
3. 学会等名 幾何学研究会、岡山大学
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 伊藤仁一
2. 発表標題 発見的幾何教材の事例と教員に必要な幾何的素養
3. 学会等名 教員養成都城研究会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 伊藤仁一
2. 発表標題 多面体を裏返す
3. 学会等名 第26回沼津改め静岡研究会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 奈良知恵
2. 発表標題 高次元生多胞体の2次元面上への連続的平坦化(1)
3. 学会等名 第11回直観幾何学
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 清原一吉
2. 発表標題 測地流の可積分性に関する Eisenhardt の一定理のケーラー版
3. 学会等名 神戸研究集会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Itoh, Jin-ichi
2. 発表標題 Cut locus and Intuitive Geometry
3. 学会等名 Geometry Seminar at Hebei Normal University
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Itoh, Jin-ichi
2. 発表標題 Total mixed curvature of open curves in E^3
3. 学会等名 The 13th Int. Conf. on Discrete Geometry
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 榎本一之
2. 発表標題 曲線の混合全曲率
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 伊藤仁一
2. 発表標題 Reversing polyhedral surfaces and several topics of Intuitive Geometry
3. 学会等名 2nd Miyazaki Geometry Seminar
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 清原一吉
2. 発表標題 測地流の可積分性に関する Eisenhart の定理のケーラー版
3. 学会等名 福岡大研究集会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 伊藤仁一
2. 発表標題 Reversing a polyhedral surface and some topics of Intuitive geometry
3. 学会等名 研究集会 - 榎本一之教授退職直前ワークショップ
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分 担 者	清原 一吉 (Kiyohara Kazuyishi) (80153245)	岡山大学・自然科学研究科・特命教授 (15301)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------