

令和 4 年 6 月 13 日現在

機関番号：32657

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2021

課題番号：17K05228

研究課題名（和文）複素鏡映群の齋藤構造の多角的研究

研究課題名（英文）A study on Saito structure for complex reflection groups

研究代表者

三鍋 聡司（Minabe, Satoshi）

東京電機大学・工学部・准教授

研究者番号：30455688

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,500,000円

研究成果の概要（和文）：複素ベクトル空間のある超平面を点ごとに固定するような位数有限の線型変換で生成される複素一般線形群の有限部分群を有限複素鏡映群と呼ぶ。有限複素鏡映群の軌道空間上の齋藤構造と呼ばれるある種の平坦構造の存在と一意性の問題に関して、齋藤構造の概双対性を用いて研究を行った。加藤・眞野・関口によって構成された、双対性群と呼ばれるクラスの有限複素鏡映群に対する齋藤構造を概双対性を用いて再構成し、一意性を示した。また、結果を双対性群とは限らない全ての有限複素鏡映群について拡張し、齋藤構造の存在と一意性の問題についての解答を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

有限実鏡映群の軌道空間上に標準的なフロベニウス多様体構造が存在することは、齋藤らによって1970年代から知られていた。一方、有限複素鏡映群の場合は、2016年に加藤・眞野・関口が、双対性群と呼ばれるクラスの有限複素鏡映群の軌道空間上に齋藤構造が存在することを示した。これは、新しく発見された齋藤構造を許容する空間の重要な例であり、ミラー対称性など様々な分野の研究と関連することが期待される。従って、これに関する知見を深めることは基本的な研究課題であり、本研究の成果をもとにして今後さらなる研究の発展が期待できる。

研究成果の概要（英文）：A finite subgroup of a general linear group is called a complex reflection group if it is generated by linear transformations of finite order which fix a hyperplane point-wise. We have studied the existence and uniqueness problem of Saito structures, a certain flat structure, on the orbit spaces of complex reflection groups. We reconstructed Saito structures for the duality groups first constructed by Kato, Mano, and Sekiguchi from the viewpoint of almost duality of Saito structures, and showed the uniqueness. Furthermore, we extend the results to all the finite complex groups which are not necessarily duality groups and obtained the answer for the existence and the uniqueness problem for Saito structures.

研究分野：幾何学

キーワード：複素鏡映群 齋藤構造 平坦不変式

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) 有限実鏡映群 (= 有限コクセター群) の軌道空間上に、ある種の自然な平坦構造が存在することは、齋藤・齋藤・矢野・関口による基本的な結果である。この平坦構造とは、複素多様体の正則接束上に、平坦計量、可換で結合的な積構造、その積構造の平坦な単位元、オイラー場、という 4 つ組が与えられ、それらが様々な整合性条件を満たすものである。後にドゥプロピンは、この構造をフロベニウス多様体という名前で公理化した。この平坦構造の存在の帰結として、有限実鏡映群の不变式環には平坦不变式から成る特別な生成系(平坦生成系と呼ぶ)が存在することが従う。

(2) 擬鏡映(複素ベクトル空間のある超平面を点ごとに固定するような位数有限の線型変換)で生成される複素一般線形群の有限部分群を有限複素鏡映群と呼ぶ。有限実鏡映群の平坦構造を有限複素鏡映群に拡張することは自然な問題である。ただし、ここでは「計量なしの平坦構造」を考える。これは、平坦計量を出発点とするのではなく、平坦で擦れない接続(計量がある場合のレビ・チビタ接続に当たるもの)を出発点とする平坦構造であり、一言で言えばフロベニウス多様体から計量に関する情報を忘れたものである。有限複素鏡映群の中に双対性群(文献によっては良生成群と呼ばれることもある)と呼ばれるクラスがある。これは、ある意味で良い性質を持つ有限複素鏡映群であって、有限コクセター群もこの中に含まれる。近年、加藤・眞野・関口は、双対性群の軌道空間上に「計量なしの平坦構造」が存在することを示した。その帰結として、双対性群の不变式環に平坦生成系が存在することが従う。

2. 研究の目的

本研究では、有限複素鏡映群の軌道空間上の「計量なしの平坦構造」について、多角的な視点から理解を深めるべく研究を行った。上記の「計量なしの平坦構造」とは、正確には「(計量なしの)齋藤構造」と呼ばれるもので、複素多様体の正則接空間上のある種の平坦構造である。これは、フロベニウス構造の下部構造としても現れ、ミラー対称性の研究でも基本的な研究対象である。有限実鏡映群の軌道空間上に標準的なフロベニウス構造が存在することは、齋藤らによって 1970 年代から知られていた。一方、有限複素鏡映群の場合は、2016 年に加藤・眞野・関口が、双対性群と呼ばれるクラスの有限複素鏡映群の軌道空間上に齋藤構造が存在することを示した。これは、新しく発見された齋藤構造を許容する空間の重要な例である。この有限複素鏡映群の軌道空間上の齋藤構造の特徴付けを与えること、またこの結果を双対性群とは限らない一般の有限複素鏡映群に拡張することを当初の目的として研究を行った。

3. 研究の方法

概双対性とは、フロベニウス構造について一般的に成り立つ一種の双対性である。フロベニウス多様体の構造はその交差形式と呼ばれるデータで特徴付けることができる。概双対性はそれを一般的な枠組みで整理したものであり、ドゥプロピンによって定式化された。これを用いて、有限実鏡映群の軌道空間上のフロベニウス多様体構造の特徴付け(一意性定理)を与えることができる。我々は(計量なしの)齋藤構造に対して概双対性を一般化し、これを基本的な枠組み(あるいはツール)として有限複素鏡映群の軌道空間上の齋藤構造について詳しく調べた。

4. 研究成果

(1) 最初に、フロベニウス多様体の概双対性の理論を、(計量なしの)齋藤構造について一般化した。次に、概双対性の観点から加藤・眞野・関口の構成がいかに捉えられるかを調べた。そのために、まず、概双対性を用いて軌道空間上の「自然な」齋藤構造の存在問題を定式化した。概双対性により、この問題の解が存在すれば一意性が成り立つ。我々は、全ての有限既約複素鏡映群に対して、自然な齋藤構造の存在と一意性の問題について解答を与えた(小西、白石両氏との共同研究)。これは、双対性群の場合は、加藤・眞野・関口の結果を再構成したものになっており、彼らの構成した齋藤構造の特徴付けを与えたことになっている。また、双対性群でない場合にも、自然な齋藤構造の存在・非存在を明らかにしたという意味で、加藤・眞野・関口の結果を一般化している。

(2) 次に、有限実鏡映群(有限コクセター群)と、シェファード群とよばれるクラスの複素鏡映群について、軌道空間上の齋藤構造を、概双対性を用いて詳しく調べた(小西氏との共同研究)。ここで、シェファード群とは、複素正多面体の自己同型群として定義される有限複素鏡映群のことである。これらの群の軌道空間は 2 種類の齋藤構造を持つ。1 つは齋藤、ドゥプロピンによって構成されたもの(コクセター・シェファード型と呼ばれる)であり、もう 1 つは加藤・眞野・関口によって構成されたもの(上記の自然な齋藤構造)である。この 2 種類の齋藤構造の関係を明らかにすることは基本的な問題である。この問題は、群の階数が 3 以下の場合にはアルジー・ロレンツォーニによって調べられていた。我々は、この問題に対する完全な解答を齋藤構造の概双対性を用いて与えた。結果は、有限実鏡映群の場合には両者は一致するが、シェファード群の場合には両者は一致するとは限らないというものであった。もう少し詳しく述べると、2 つの齋

藤構造の積構造は全ての有限実鏡映群、シェファード群について一致するのだが、平坦接続に関しては、有限実鏡映群の場合は一致するが、シェファード群についてはその一部の群についてのみ一致するというものであった。どのシェファード群の場合に一致するかは、シェファード群の分類を用いて具体的に決定した。両者が一致しない場合は、積構造と整合的な不変式環の平坦生成系が異なるということであり、大変興味深い例となっている。さらに、自然な齋藤構造がどのような場合に整合的な計量(すなわち、フロベニウス多様体構造)を許容するかも明らかにした。結果は、自然な齋藤構造が計量を許容するのは、それが齋藤・ドゥプロビンによるコクセター・シェファード型の齋藤構造と一致する場合、その場合に限るというものであった。

(3) 近年佐竹氏によって導入された、鏡映群の不変式の平坦生成系を特徴付ける「良い生成系の条件」という視点を取り入れて、不変式論的観点から研究全体の見直しを行った(小西氏との共同研究)。複素鏡映群の軌道空間上には、加藤・眞野・関口によって構成された自然な齋藤構造と呼ばれる平坦構造が存在し、それに関する平坦座標系が複素鏡映群の不変式環における平坦生成系という特別な生成系になることが知られている。有限実鏡映群の場合は、佐竹氏の導入した良い生成系は、この平坦生成系と一致することが佐竹氏によって示されていた。これと同じことが複素鏡映群についても成り立つかどうかを調べた。結果としては、有限実鏡映群の場合と同様のことが複素鏡映群に対しても成り立つことが分かった。すなわち、佐竹の意味での良い生成系は、複素鏡映群に付随する自然な齋藤構造の平坦座標系を与える。良い生成系の条件は、不変式を実際に計算するときにも役立つ条件であり、平坦座標系を定義通りに接続行列を用いて計算するよりも実効的な計算方法を与えてくれる。これは良い生成系を考える利点の一つである。この方法を用いて良い生成系(平坦不変式)の計算を行い、以前計算した平坦不変式と一致することを多くの具体例で確認した。また、積構造に関しても、佐竹氏は積構造の構造定数が、良い生成系のテイラー係数で表されることを示している。同様の結果が双対性群の齋藤構造の積構造に対しても成り立つことが分かった。

このように、本研究では、加藤・眞野・関口の齋藤構造を詳しく調べ、一般化するという当初の研究目的は達せられた(上記(1)の研究成果)。また、概双対性という視点から派生した新たな知見として、積構造は一致するが平坦接続(平坦座標系)は異なるという齋藤構造の新しい例も得ることができた(上記(2)の研究成果)。今後の展望としては、上記(3)の観点の研究を進めることが特に重要な研究課題であると考えている。具体的な問題として、以下の諸問題が挙げられる。

齋藤構造の概双対性と良い生成系の条件との関連を明らかにする。

シェファード群の中に自然な齋藤構造とは異なるフロベニウス構造を持つ群が存在するので、その不変式環の平坦生成系を特徴付ける「良い生成条件」を発見する。

また、少し別の視点として、複素鏡映群には鏡映超平面からなる超平面配置が付随している。この超平面配置は、軌道空間上の自然な齋藤構造の概双対構造を支配していると予想される。この点を明確にすることも重要な課題である。具体的な問題としては次の2点が挙げられる。

複素鏡映群の軌道空間上の齋藤構造の概双対構造の積を、超平面配置を用いて記述するアルジー・ロレンツォーニの予想を証明する。

超平面配置を用いた概双対構造の記述を用いて、軌道空間上の判別式因子上の極限の存在を調べる。

これらの点に関しても、上記のと結び付けて、不変式環の良い生成系との関連から調べるのが良い方針のように思われる。以上の点については、今後も鋭意研究を進めていきたいと考えている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 4件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Yukiko Konishi, Satoshi Minabe	4. 巻 60(3)
2. 論文標題 Mixed Frobenius structure and the local A-model	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Kyoto J. Math	6. 最初と最後の頁 997-1032
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1215/21562261-2019-0053	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yukiko Konishi, Satoshi Minabe	4. 巻 16(3)
2. 論文標題 Almost duality for Saito structure and complex reflection groups II: the case of Coxeter and Shephard groups	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Pure and Applied Mathematics Quarterly	6. 最初と最後の頁 721 -754
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4310/PAMQ.2020.v16.n3.a12	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 三鍋聡司	4. 巻 なし
2. 論文標題 On the cohomology of some moduli spaces of weighted stable curves of genus zero and one	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 研究会「リーマン面に関連する位相幾何学」予稿集	6. 最初と最後の頁 120-126
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Fuji Shigeyuki, Minabe Satoshi	4. 巻 13, 052
2. 論文標題 A Combinatorial Study on Quiver Varieties	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications	6. 最初と最後の頁 1-28
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3842/SIGMA.2017.052	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Y.Konishi, S.Minabe, and Y.Shiraishi	4. 巻 3
2. 論文標題 Almost duality for Saito structure and complex reflection groups	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Integrable Systems	6. 最初と最後の頁 1-48
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/integr/xyy003	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計5件(うち招待講演 4件/うち国際学会 1件)

1. 発表者名 三鍋聡司
2. 発表標題 On the cohomology of some moduli spaces of weighted stable curves of genus zero and one
3. 学会等名 研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 三鍋聡司
2. 発表標題 斎藤構造の概双対性と複素鏡映群
3. 学会等名 Encounter with Mathematics (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 小西由紀子・三鍋聡司・白石勇貴
2. 発表標題 斎藤構造の概双対性と複素鏡映群
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 三鍋聡司
2. 発表標題 Almost duality for Saito structure and complex reflection groups
3. 学会等名 多弦数理物理セミナー（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Satoshi Minabe
2. 発表標題 Almost duality for Saito structure and complex reflection groups: the case of Coxeter and Shephard groups
3. 学会等名 Frobenius manifolds and related topics（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------