

令和 4 年 6 月 17 日現在

機関番号：52501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K05234

研究課題名(和文) 周期から得られる位相的漸化式の新展開

研究課題名(英文) New development of topological recursion obtained from period integrals

研究代表者

田所 勇樹 (Tadokoro, Yuuki)

木更津工業高等専門学校・基礎学系・准教授

研究者番号：10435414

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,000,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的は、リーマン面のモジュライ空間の局所的な構造を定量的に理解することにある。モジュライ空間とはリーマン面全体からなる空間であり、様々な分野において重要な研究対象とされてきた。調和体積はモジュライ空間を調べる上での重要な複素解析的不変量である。超楕円曲線と呼ばれるリーマン面の調和体積を、反復積分を用いて導出した。さらに、調和体積と写像類群の拡大ジョンソン準同型の関係性を明らかにした。また、非線形 $O(3)$ シグマ模型を用いて、離散リーマン面上のエネルギーに関する不等式を導出した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

モジュライ空間とはリーマン面全体からなる空間であり、19世紀のリーマンに始まり、複素解析学、微分位相幾何学、代数幾何学、物理学など様々な分野において、重要な研究対象とされてきた。モジュライ空間の局所的な構造を定量的に理解するために、調和体積のような複素解析的不変量の明示的な導出が重要である。対称性を利用して、特別なリーマン面の調和体積を導出した。モジュライ空間と曲面の写像類群は深い関連があり、写像類群の拡大ジョンソン準同型と調和体積を結びつけることができた。このようにして、モジュライ空間の局所的な構造に対する新たな知見を得た。

研究成果の概要(英文)：The moduli space of compact Riemann surfaces is the space of all biholomorphism classes of compact Riemann surfaces. The harmonic volume of compact Riemann surfaces is a complex analytic invariant using Chen's iterated integrals. It enables a quantitative study of the local structure of the moduli space. We obtain its new value for a certain pointed hyperelliptic curve. We explain the relationship between the harmonic volume and first extended Johnson homomorphism on the mapping class group of a pointed oriented closed surface.

研究分野：幾何学

キーワード：リーマン面 モジュライ空間 位相的漸化式 周期 調和体積 写像類群 反復積分 トポロジー

1. 研究開始当初の背景

本研究の中心的な役割を果たすリーマン面のモジュライ空間について述べる. 種数 $g \geq 0$, 境界成分 $n \geq 0$ 個をもつコンパクト有向曲面を Σ と表す. 定曲率 -1 をもつ双曲曲面をリーマン面と呼ぶ. $L = (L_1, L_2, \dots, L_n)$ が各境界成分の測地的長さの組であるような, リーマン面の同値類全体をリーマン面のモジュライ空間 \mathcal{M} と呼ぶ. モジュライ空間は, 19 世紀のリーマンに始まり, 複素解析学, 微分位相幾何学, 代数幾何学, 物理学など様々な分野において, 重要な研究対象とされてきた.

モジュライ空間 \mathcal{M} には, Weil-Petersson 形式と言う自然なシンプレクティック 2 次微分形式が定まる. 外積をとることにより, 体積形式から Weil-Petersson 体積 $V_{g,n}(L)$ が定義できる. Mirzakhani は一連の論文において, $V_{g,n}(L)$ の研究を行った. 測地線の長さに関する McShane 恒等式を一般化することにより, $V_{g,n}(L)$ に関する漸化式を導出した. Eynard と Orantin はこの漸化式をラプラス変換することにより, 位相的漸化式を導いた. この位相的漸化式は一般化され, スペクトル曲線に対して定義された. スペクトル曲線の取り方により, ミラー対称性, 結び目に関する体積予想, Kontsevich-Penner 行列模型と関連することが指摘され, 興味深い研究対象の一つと言える. 一方, $n = 0$ のときの有向閉曲面 Σ に複素構造が入るとき, 閉リーマン面 X と呼び, 閉リーマン面のモジュライ空間も \mathcal{M} と表す. モジュライ空間を位相幾何学の観点から研究する際に, 曲面の写像類群の拡大ジョンソン準同型は重要な道具となる.

1 次微分形式の積分およびその拡張である Chen の反復積分, グリーン関数を用いて, モジュライ空間 \mathcal{M} 上のある平坦束のなめらかな切断 I が定まる. この特別な場合を, 周期, 調和体積と呼ぶ. 周期や周期行列は古典的に知られており, Siegel 上半空間と結びつけるなど様々な角度から研究されている. 調和体積は Harris により定義された. 切断 I は直接計算可能な複素解析的不変量であり, モジュライ空間の局所的な構造を定量的に解明するための道具と言える. 切断 I の拡張として得られる調和的マグナス展開は河澄響矢氏により定義された. さらに, モジュライ空間の 2 種類の微分形式の差として得られる新たな不変量として, 河澄-Zhang 不変量が定義された.

2. 研究の目的

本研究の目的は, リーマン面のモジュライ空間の局所的な構造を定量的に理解することにある. モジュライ空間に対して自然に定まる Weil-Petersson 体積 $V_{g,n}(L)$ は, Mirzakhani を初めとする多くの研究者によって解析されてきた. $V_{g,n}(L)$ の満たす漸化式の拡張として位相的漸化式が定まり, 物理学者を中心に研究されている. 本研究では, 曲面の複素構造に依存して定まる周期, 調和体積, 調和的マグナス展開, 河澄-Zhang 不変量と位相的漸化式を結びつけることにより, 新たな不変量を導出して, モジュライ空間の局所的な構造の定量的な理解を試みる.

3. 研究の方法

(1) 双正則自己同型群が非自明であるような, 対称性の高い閉リーマン面 X について, 周期, 調和体積を導出する. 双正則自己同型群 $\text{Aut}(X)$ の X への自然な作用を利用して, 調和体積の導出に必要な正則 1 次微分形式のポアンカレ双対を計算する. 周期を導出する数式処理プログラムを作成して, 多くのリーマン面でプログラムを実行する.

(2) 曲面の理想 3 角形分割から得られる, 1, 3 価頂点の有向計量付きグラフをファットグラフと呼ぶ. モジュライ空間上の点と同一視することができる. ファットグラフのトレミー変形は, モジュライ空間のコホモロジー類と結びついている. Mercat の離散リーマン面とは, 曲面の 3 角形分割とその双対上に離散複素構造を導入したものである. 通常の複素構造と似た構造を持ち, 無限に細かくしていくと通常の複素構造に近づくことが知られている. トレミー変形, および Mercat が発見した離散リーマン面の周期行列を導出するアルゴリズムを利用して, 周期, 調和体積を導出する.

(3) これまでの周期, 調和体積の導出結果と, 具体的なスペクトル曲線の位相的漸化式を組み合わせることにより, 調和的マグナス展開および河澄-Zhang 不変量を明示的に導出し, モジュライ空間の構造を定量的に理解する.

4. 研究成果

(1) 超楕円曲線 C とは, 複素射影直線 $\mathbb{C}P^1$ の $2g + 2$ 点分岐 2 重分岐被覆であり, 種数 g のリーマン面である. 分岐点の取り方によって C の複素構造が変化する. 代数方程式 $w^2 = z^{2g+1} - 1$ から得られる超楕円曲線の点付き調和体積を, 反復積分を用いて導出した. また, 調和的マグナス展開を利用して, 拡大ジョンソン準同型と点付き調和体積を結びつけた. さらに, 写像類群の拡大ジョンソン準同型の具体的な値を決定した. これらの結果をまとめた論文が専門誌に採択された. 招待講演を含む各種研究集会において, 点付き調和体積と拡大ジョンソン準同型に関する講演

を行った．

(2) 数理物理学で扱われる場の理論の離散化の一つとして、非線形 $\phi(3)$ シグマ模型を用いて離散リーマン面上のエネルギーに関する不等式を、鎌田勝(木更津高専)氏との共同研究により導出した．通常の複素構造との整合性をより高めた離散複素構造が近年定義され、我々はその定義を用いている．特別な条件を満たす離散リーマン面上の離散正則関数が、離散オイラー-ラグランジュ方程式を満たすことを示した．菱形格子から得られる離散リーマン面上の離散正則関数についてのエネルギーを明示的に導出した．上記についてまとめた論文を投稿する予定である．

(3) 自由組みひも群の研究において、Kim と Manturov は 5 角関係式をもつ群 Γ を定めたが、 Γ の構造はあまり知られていない．逆井卓也(東大数理)氏、田中心(東京学大教育)氏との共同研究により、組合せ群論的な考察から、群 Γ の一つの最小生成系を与え、そのアーベル化を導出した．

(4) 超楕円曲線や対称性の高いリーマン面に関する非自明な複素解析的不変量の導出に取り組んだが、明示的な結果が得られなかった．また、特別なリーマン面の周期計算プログラムを作成したが、うまくいかない場合があり、修正中である．

なお、本科研費により、4 件の研究集会を共同で開催した．

「モジュライ空間のシンプレクティック幾何」

期日：2018 年 1 月 26 日(金)～1 月 28 日(日)

場所：東京大学大学院数理科学研究科 123 教室

世話人(敬称略)：逆井卓也(東大数理)、河澄響矢(東大数理)、田所勇樹(木更津高専)

「リーマン面に関連する位相幾何学」

期日：2018 年 8 月 7 日(火)～8 月 10 日(金)

場所：東京大学大学院数理科学研究科 123 教室

世話人(敬称略)：河澄 響矢(東大数理)、久野 雄介(津田塾大)、佐藤 正寿(東京電機大)、田所 勇樹(木更津高専)

「モジュライ空間と双曲幾何の進展」

期日：2019 年 1 月 24 日(木)～1 月 26 日(土)

場所：東京大学大学院数理科学研究科 123 教室(24, 25 日)、056 教室(26 日)

世話人(敬称略)：逆井卓也(東大数理)、河澄響矢(東大数理)、田所勇樹(木更津高専)

「リーマン面のモジュライ空間の諸相」

期日：2020 年 1 月 23 日(木)～1 月 25 日(土)

場所：東京大学大学院数理科学研究科 002 教室

世話人(敬称略)：逆井卓也(東大数理)、河澄響矢(東大数理)、田所勇樹(木更津高専)

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yuuki Tadokoro	4. 巻 12
2. 論文標題 Pointed harmonic volume and its relation to the extended Johnson homomorphism	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Topology and Analysis	6. 最初と最後の頁 87-103
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S1793525319500407	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計8件（うち招待講演 4件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 田所勇樹
2. 発表標題 Nonlinear $O(3)$ sigma model in discrete complex analysis
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yuuki Tadokoro
2. 発表標題 Pointed harmonic volume and its relation to the extended Johnson homomorphism
3. 学会等名 Workshop: Johnson homomorphisms and related topics 2019（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田所勇樹
2. 発表標題 Pointed harmonic volume and its relation to extended Johnson homomorphism
3. 学会等名 幾何学コロキウム，北海道大学理学部（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 田所勇樹
2. 発表標題 Pointed harmonic volume and its relation to the extended Johnson homomorphism
3. 学会等名 研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」, 東京大学大学院数理科学研究科
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 田所勇樹
2. 発表標題 Pointed harmonic volume and its relation to the extended Johnson homomorphism
3. 学会等名 東北複素解析セミナー, 東北大学情報科学研究科 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田所勇樹
2. 発表標題 Pointed harmonic volume and its relation to the extended Johnson homomorphism
3. 学会等名 東工大複素解析セミナー, 東京工業大学理学院 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田所勇樹
2. 発表標題 Nonlinear $O(3)$ sigma model in discrete complex analysis
3. 学会等名 研究集会「ストリングトポロジーとその周辺」
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 田所勇樹
2. 発表標題 Pointed harmonic volume and its relation to extended Johnson homomorphism
3. 学会等名 日本数学会2018年度年会、一般講演
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

researchmap https://researchmap.jp/ytadokoro/
--

6. 研究組織			
	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------