様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２年　６月１９日現在

機関番号：５３８０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2017～2019
課題番号：１７Ｋ０５２３５

研究課題名（和文）可解多様体上の局所共形ケーラー構造について

研究課題名（英文）Locally conformal Kahler structure on solvmanifolds

研究代表者
澤井　洋（Sawai, Hiroshi）

沼津工業高等専門学校・教養科・准教授

研究者番号：７０５５０４８２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,800,000円

研究成果の概要（和文）：局所共形ケーラー幾何において，Lee 形式が並行のとき，Vaisman 構造という．可解多様体である井上曲面は，非 Vaisman な局所共形ケーラー構造をもつことが知られている．これを拡張して，局所共形ケーラー構造をもたない可解多様体の族を構成した．次に，局所共形ケーラー可解多様体において，Vaisman 構造となるための複素構造に関する条件を求めた.そして，Vaisman 可解多様体の構造定理を求め，新しい Vaisman 可解多様体を構成した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
可解多様体である井上曲面や O-T 多様体は非 Vaisman な局所共形ケーラー構造をもち，これらは，計量や複素構造を変形しても，Vaisman 構造をもたないことは，個別に知られていた．本研究によって，これらは統一的に，Vaisman 構造をもたないことは示される．さらに，Vaisman 可解多様体は Kodaira-Thurston 多様体とエルミート多様体のある種の意味で同値であることが知られていたが，これを推し進め，Vaisman 可解多様体の構造に言及した．

研究成果の概要（英文）：On locally conformal geometry, if Lee form is parallel, then it is called a Vaisman structure. It is known that Inoue surface, which is a solvmanifold, has a non-Vaisman locally conformal Kahler structure. We generalised Inoue surface and constructed solvmanifolds without locally conformal Kahler structures. Next, we asked for a sufficient condition for a Vaisman structure on locally conformal Kahler solvmanifolds. Moreover, we had the structure theorem for a Vaisman solvmanifold and constructed the new example of a Vaisman solvmanifold.

研究分野：微分幾何

キーワード：可解多様体　べき零多様体　局所共形ケーラー構造　Vaisman 構造　複素構造　ケーラー構造

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

1.　研究開始当初の背景

可解リー群が推移的に作用するコンパクト多様体を可解多様体という。べき零多様体も同様に定義される。したがって、べき零多様体は可解多様体である。ケーラー構造をもつ可解多様体は複素トーラス上の複素トーラス束の構造をもつことが知られている。

べき零・可解多様体はほとんどケーラー構造をもたないものの、ケーラー幾何と相対しているわけではない。その理由は、ケーラー構造をもたないシンプレクティック多様体が、歴史上初めて、べき零多様体で構成されているからである。これを Kodaira-Thurston 多様体という。この発見を発端に、べき零・可解多様体の研究が活発化し、（ケーラー構造をもたないものの、）ケーラー構造をもつための必要な条件を満たす、べき零・可解多様体が発見されてきた。 このような例の存在から、べき零・可解多様体がケーラー構造の拡張となる構造をどれほどもつかが問題となる。

ケーラー構造の拡張として、リーマン計量を局所的に共形変換するとケーラー構造となるエルミート構造を、局所共形ケーラー構造という。非ケーラー多様体の典型例として、上述の Kodaira-Thurston 多様体の他に、Hopf 多様体、井上曲面が知られているが、これら 3 つの多様体は局所共形ケーラー構造をもつことが知られている。特に、Kodaira-Thurston 多様体はべき零多様体であったが、井上曲面は非べき零な可解多様体である。さらに、O-T 多様体も局所共形ケーラー構造をもつが、これも非べき零な可解多様体である。このように、べき零・可解多様体は、Hopf 多様体はこれと異なるものの、複数の局所共形ケーラー多様体を供給している。

2.　研究の目的

すでに、局所共形ケーラー構造をもつべき零多様体は、上述の Kodaira-Thurston 多様体に限ることがわかっている。そこで、可解多様体における局所共形ケーラー構造について研究する。

局所共形ケーラー構造において、その Lee 形式が平行のとき、Vaisman 構造という。Kodaira-Thurston 多様体は Vaisman 多様体であり、井上曲面や O-T 多様体はこれと異なる。したがって、べき零多様体上の局所共形ケーラー構造は Vaisman 構造であることに対し、可解多様体の場合、Vaisman 構造とは限らない。そこで、まず、Vaisman 可解多様体の構造を解明する。そして、低次元局所共形ケーラー可解多様体の構成・分類を行い、非 Vaisman 局所共形ケーラー可解多様体の構造を予想し、証明する。

3.　研究の方法

日本数学会・幾何学シンポジウムなどの関連する研究集会に参加することで、関連する研究者との情報交換・研究連絡を行った。特に、日本数学会には最も多くの研究者が集まるため、自身の研究の発信・推進のため，一般講演を行った。

坂根由昌氏（大阪大学）や 山田拓身氏（島根大学）は可解多様体に詳しく、定期的に研究打合せを行った。

４．研究成果

本研究の成果、及び、その国内外における位置付けは以下の通りである：

(1) 井上曲面における局所共形ケーラー構造とその拡張

可解多様体である井上曲面は局所共形ケーラー構造をもち，特に、これは Vaisman 構造でない。また、リーマン計量や複素構造を変形しても、井上曲面は Vaisman 構造をもたないことが知られていた。これに興味をもち、可解多様体における局所共形ケーラー構造が Vaisman 構造となるための基本 2 次形式に関する必要十分条件を得ていたので、これを用いて、井上曲面が Vaisman 構造をもたないことの別証明を与えた。そして、井上曲面を拡張して、局所共形ケーラー構造をもたない可解多様体の族を構成した。但し、これらの可解多様体は、局所共形シンプレクティック構造（局所共形ケーラー構造のシンプレクティック版）をもつ。

Vaisman 構造をもつ完全可解多様体（作用するリー群がある条件を満たす可解多様体）は、Kodaira-Thurston 多様体となる。井上曲面を拡張した上述の可解多様体が局所共形ケーラー構造をもたないことの証明は、この Vaisman 完全可解多様体の構造定理を用いる。即ち、これが局所共形ケーラー構造をもつならば Vaisman 構造となることを示し、矛盾を導いている。

井上曲面を拡張した可解多様体は局所共形ケーラー構造をもたないことから、局所共形ケーラー多様体は、多様体の次元によって、様相が異なることを示唆している。また、その証明方法から、可解多様体における局所共形ケーラー構造と Vaisman 構造にはギャップがあることが推測される。

(2) 局所共形ケーラー構造における複素構造

可解多様体における局所共形ケーラー構造と Vaisman 構造とのギャップを解明するため、基本 2 次形式の次として、複素構造に着目した。そして、可解多様体における局所共形ケーラー構造が、Vaisman 構造となるための複素構造に関する必要十分条件を求めた。

応用として、可解リー群が概アーベル群である可解多様体が Vaisman 構造をもつならば、完全可解多様体となることがわかる。したがって、Vaisman 完全可解多様体の構造定理から、これは Kodaira-Thurston 多様体となる。

よって、井上曲面だけでなく、O-T 多様体も、リーマン計量や複素構造を変形しても、Vaisman 構造をもたない。井上曲面や O-T 多様体が Vaisman 構造をもたないことは個別に知られていたが、複素構造に関するこの必要十分条件から、統一的に証明することができたことになる。

(3) Vaisman 可解多様体

可解多様体における局所共形ケーラー構造が Vaisman 構造となるための必要十分条件として、エルミート構造を決定している基本 2 次形式や複素構造に関するものを得たので、これらを用いて、Vaisman 可解多様体の構造定理を試みた。Vaisman 可解多様体から、ケ

ーラー構造をもつユニモジュラーなリー群を誘導することができる。そして、ケーラー構造をもつリー群に関する研究を用いて、Vaisman 可解多様体の構造定理を得た。具体的には、その可解リー群の極大べき零正規リー部分群は、Heisenberg リー群といくつかの実数の直積となる。さらに、Vaisman 可解多様体は、リーマン計量や複素構造を変形しても、非 Vaisman な局所共形ケーラー構造をもたないこともわかる。

また、Kodaira-Thurston 多様体と異なる新しい Vaisman 可解多様体を構成した。しかがって，非 Vaisman な局所共形ケーラー構造をもつ可解多様体は、井上曲面や O-T 多様体があるが、Vaisman 構造をもつ可解多様体に限っても、新しい例が存在することになる。

エルミート多様体にはある種の同値類を定義することができ、Vaisman 可解多様体は Kodaira-Thurston 多様体と同値であることが知られている。上述の結果は、その可解リー群の構造に言及していることに意味がある。

本研究を通して、可解多様体における局所共形ケーラー構造と Vaisman 構造には，研究当初に予見していた以上に、ギャップがあることがわかった．

今後の展望は以下の通りである：

(1) Vaisman 可解多様体の幾何構造

べき零多様体が局所共形ケーラー構造をもつならば、Kodaira-Thurston 多様体となり、これは Vaisman 多様体である。Vaisman 可解多様体は Kodaira-Thurston 多様体とエルミート多様体の意味で同値である。この同値性と、求めた Vaisman 可解多様体の構造定理から、その幾何構造の解明にも取り組みたい。Vaisman 多様体である Hopf 多様体の曲率などはすでによく研究されており、Kodaira-Thurston 多様体をはじめ、Vaisman 可解多様体との比較を行いたい。

(2) 非 Vaisman 型局所共形ケーラー可解多様体

上述の Vaisman 可解多様体の構造定理から、非 Vaisman な局所共形ケーラー構造をもつ可解多様体は，リーマン計量や複素構造を変形しても、Vaisman 構造をもたないこともわかる。これの典型例が、井上曲面や O-T 多様体である。即ち、可解多様体において、局所共形ケーラー構造の Vaisman 型と 非 Vaisman 型に完全な分断を与えたことになる。Vaisman 可解多様体の構造定理を得たので、非 Vaisman 型局所共形ケーラー可解多様体の構成や分類、及び、構造定理に取り組みたい。そして、曲率などの幾何構造も調べ、Hopf 多様体や Vaisman 可解多様体との比較を行いたい。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 Ｓａｗａｉ，　Ｈｉｒｏｓｈｉ	４．巻 ５
２．論文標題 Examples of solvmanifolds without LCK structures.	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Ｃｏｍｐｌｅｘ　Ｍａｎｉｆｏｌｄｓ	６．最初と最後の頁 １０３－１１０
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計8件（うち招待講演　5件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 沢井　洋
２．発表標題 可解多様体における Vaisman 構造と複素構造について
３．学会等名 RIMS 共同研究　部分多様体の幾何学と深化と展開（招待講演）
４．発表年 2018年

１．発表者名 沢井　洋
２．発表標題 LCK 可解多様体における Vaisman 構造と複素構造について
３．学会等名 日本数学会 2018 年度秋季総合分科会(一般講演)
４．発表年 2018年

１．発表者名 沢井　洋
２．発表標題 Vaisman 可解多様体の構造定理に向けて
３．学会等名 日本数学会　2019　年度年会(一般講演)
４．発表年 2019年

１．発表者名 澤井　洋
２．発表標題 LCK structures on compact solvmanifolds
３．学会等名 複素解析幾何セミナー（東京大学）（招待講演）
４．発表年 2017年

１．発表者名 澤井　洋
２．発表標題 可解多様体上の LCK 構造と Vaisman 構造について
３．学会等名 松江セミナー（島根大学）（招待講演）
４．発表年 2017年

１．発表者名 澤井　洋
２．発表標題 Examples of solvmanifolds without LCK structures
３．学会等名 Workshop on Geometry in Oita（ホルトホール大分）（招待講演）
４．発表年 2017年

１．発表者名 澤井　洋
２．発表標題 LCK 構造をもたない可解多様体の例
３．学会等名 沼津改め静岡研究会（招待講演）
４．発表年 2018年

１．発表者名 澤井　洋
２．発表標題 Examples of solvmanifolds without LCK structures
３．学会等名 日本数学会 2018 年度年会一般講演（東京大学）
４．発表年 2018年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考