

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 2 年 6 月 30 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K05237

研究課題名(和文) Artin群のコホモロジーとその周辺の位相幾何学的研究

研究課題名(英文) Topological studies on cohomology of Artin groups and related topics

研究代表者

秋田 利之 (Akita, Toshiyuki)

北海道大学・理学研究院・教授

研究者番号：30279252

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：Coxeterカンドルの随伴群はCoxeter群とArtin群の中間的な群であり、随伴群のコホモロジーの研究はCoxeter群とArtin群両者のコホモロジーの研究に資する。本研究ではCoxeterカンドルの随伴群の有理数係数コホモロジー環を完全に決定し、また随伴群のHepworth族がホモロジー安定性を持つことを示した。さらに随伴群のmod p コホモロジー群の消滅域の評価を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Artin群のコホモロジーがCoxeter群のコホモロジーの1次近似であることから、それらの中間に位置するCoxeterカンドルの随伴群のコホモロジーは、カンドルの理論だけでなくArtin群とCoxeter群のコホモロジーの研究においても重要である。本研究ではCoxeterカンドルの随伴群のホモロジー安定性の証明、コホモロジーの消滅域の評価などにより、Coxeterカンドルのコホモロジーの研究を大きく進展させた。

研究成果の概要(英文)：The adjoint group of a Coxeter quandle is an intermediate group between the corresponding Coxeter group and the Artin group. The study of cohomology of adjoint groups is important for the study of cohomology of Coxeter groups and Artin groups. As results, we determined the rational cohomology rings of all adjoint groups, proved that Hepworth families of adjoint groups have homology stability, and evaluated vanishing ranges of mod p cohomology groups of adjoint groups.

研究分野：位相幾何学

キーワード：群のコホモロジー Coxeter群 Artin群 カンドル

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

Artin 群はブレイド群の一般化、Coxeter 群は有限鏡映群・Weyl 群の一般化で両者は対になって定義される(ブレイド群と対称群の対応がその代表例である)。それらのコホモロジーの研究は群のコホモロジーにおいて重要なだけでなく、超平面配置、種々の配置空間とモジュライ空間、特異点の Milnor ファイバー、剛性、ある種のファイバー束の特性類など多様な研究対象と関連しており、これらの分野の発展にも寄与する。

一方、有限型 Artin 群や直角 Artin 群(RAAG)の整数係数コホモロジーは多くの数学者の仕事により決定されているかものの、一般の Artin 群のコホモロジーは有理数係数の場合ですらほとんど未知である。また任意の Coxeter 群の有理係数コホモロジーは自明であるが(研究代表者(2000))、有理数係数以外のコホモロジーは未解明の部分が大きかった。

2. 研究の目的

本研究の目的は Artin 群のコホモロジーおよび Coxeter 群、Coxeter カンドルの随伴群など Artin 群と密接に関連する群のコホモロジーを研究することであった。本研究では (1) Artin 群の $K(\ , 1)$ 予想 (2) Artin 群のコホモロジー安定性 (3) Artin 群と Coxeter 群の特性類 (4) Coxeter カンドルの随伴群のコホモロジーの 4 つのテーマを軸に研究を展開し、これらの群のコホモロジーの構造に関する理解を深めることを目的とした。

3. 研究の方法

本研究は研究代表者と連携研究者 3 名の計 4 名で遂行した。国内外で開催される研究集会に積極的に参加し、研究発表を行うとともに、参加者達との直接の研究連絡を行い情報収集に努めた。また関連する研究を行っている国内外の研究者を招聘、あるいは訪問することにより、メール等では不可能な密な研究討議を行い、研究の更なる促進・進展に努めた。

特に初年度はピサ大学において開催された超平面配置に関する国際研究集会に参加し、本研究に関連する研究を行っている数学者である M. Salvetti 氏、L. Paris 氏等と研究連絡・情報交換を行った。最終年度には研究代表者が所属する北海道大学大学院理学研究院に於いて「ホトピー論シンポジウム」を岸本大佑氏(京都大学)と共に主催し情報収集、研究連絡、討議の場とした。また成都(中国)で開催された 3rd Pan Pacific International Conference on Topology and Applications に参加し本研究の研究成果について総合的な報告を行った。

4. 研究成果

(1) Artin 群の 2 次の mod 2 ホモロジー群：代表者と Ye Liu との共同研究に基づく論文 Second mod 2 homology of Artin groups (Ye Liu との共著)が高水準の学術雑誌 Algebraic & Geometric Topology に掲載された。同共同研究は $K(\ , 1)$ 予想を用いずに Artin 群の 2 次の mod 2 ホモロジー群を完全に決定したもので、結果は内外の専門家より高い評価を得ている。 $K(\ , 1)$ 予想が解かれてない Artin 群の(コ)ホモロジーを計算するのは困難で、現時点では本論文の計算が最良の結果である。更に本論文では Artin 群の Hepworth 族の 2 次の mod 2 ホモロジー群がホモロジー安定性を持つことも証明している。 $K(\ , 1)$ 予想から Hepworth 族のコホモロジー安定性が導けることを Boyd が証明しているが(2018)、 $K(\ , 1)$ 予想は未だに未解決なので、一般の Hepworth 族に対しては本論文の結果が現時点では最良である。

(2) Coxeter カンドルの随伴群：カンドルは低次元トポロジーと Hopf 代数という二つの異なる分野で活発に研究されている代数系である。カンドルの随伴群はカンドルの構造の研究において重要な対象であるが、一般にはその構造を調べるのは難しい。

任意の Coxeter 系に対し Coxeter カンドルと呼ばれるカンドルが定まる。2 面体カンドルはその一例である。本研究の開始以前に、研究代表者は代表者は Artin 群から Coxeter 群への標準的な全射が Coxeter カンドルの随伴群を経由すること、したがって随伴群は Coxeter 群と Artin 群の中間的な群であることを証明した。De Concini-Salvetti によれば有限型 Artin 群のコホモロジーは有限 Coxeter 群のコホモロジーの“1 次近似”であり、 $K(\ , 1)$ 予想が正しければ、無限型 Artin 群のコホモロジーも無限 Coxeter 群のコホモロジーの“1 次近似”となる。したがってそれらの中間に位置する Coxeter カンドルの随伴群のコホモロジーの研究は、Artin 群と Coxeter 群のコホモロジーの研究においても重要である。

さらに代表者は Coxeter カンドルの随伴群が「Coxeter 群の有限生成自由アーベル群による中心拡大」と「Coxeter 群の交換子群と自由アーベル群の半直積」という二つの構造を併せ持つこと、特に対応する Coxeter 系が“連結”ならば随伴群は Coxeter 群の無限巡回群による唯一の非自明な中心拡大であることなど著しい性質を持つことを証明し、更に拡大コサイクルを具体的に

構成していた。このような研究をさらに展開し、本研究では Coxeter カンドルの随伴群に関して以下の結果を得た。

第一に Coxeter カンドルの随伴群の有理数係数コホモロジー環を完全に決定した。決定には上で述べた「Coxeter カンドルの随伴群が Coxeter 群の有限生成自由アーベル群による中心拡大である」という結果と代表者が以前得ていた Coxeter 群の有理数係数コホモロジーに関する研究が効果的に用いられている。

第二に Coxeter 群のルート系はラックと呼ばれる代数構造を持つ(Coxeter ラックとよばれる)。Coxeter ラックは Coxeter カンドルの「二重被覆」になっている。本研究では Coxeter ラックの随伴群が Coxeter カンドルの随伴群と一致することを示した。第一と第二の結果は論文として投稿し既に学術雑誌への掲載が決定している。

第三にホモロジー安定性は群のコホモロジーにおける重要だが未解明な部分が多い現象である。本研究では Coxeter カンドルの随伴群の Hepworth 族がホモロジー安定性を持つことを証明した。この結果により Coxeter カンドルの随伴群を群のコホモロジーの観点から研究することの意義がより大きくなった。

第四に Coxeter カンドルの随伴群の mod p コホモロジー群の消滅域の評価を与えた。評価には研究代表者による Coxeter 群の mod p コホモロジーの消滅域に関する先行研究が重要な役割を果たした。

第五に Majid-Rietsch (2013) は Weyl 群から定まる Coxeter カンドルの随伴群から元の Weyl 群が復元できるという著しい事実を Weyl 群の分類を用いて証明していたが、代表者は一般の Coxeter 群に対して同様の事実が成り立つことを分類を用いずに証明した。

(3) 偶数 Artin 群のホモロジー：偶数 Artin 群に対する $K(\quad, 1)$ 予想は肯定的に解かれており、偶数 Artin 群のホモロジーの計算は対応する Salvetti 複体という正則 CW 複体のホモロジーの計算に帰着される。本研究では偶数 Artin 群の 2 次の整数係数ホモロジーを Hopf の公式を用いて純代数的に決定することを試み中間的な結果を得た。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Akita Toshiyuki, Liu Ye	4. 巻 18
2. 論文標題 Second mod 2 homology of Artin groups	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Algebraic & Geometric Topology	6. 最初と最後の頁 547 ~ 568
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/agt.2018.18.547	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件（うち招待講演 7件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 秋田利之
2. 発表標題 Coxeter groups, Coxeter quandles, and Artin groups
3. 学会等名 Matroids, reflection groups, and free hyperplane arrangements（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 秋田利之
2. 発表標題 Coxeterカンドルとルート系の随伴群
3. 学会等名 ホモトピー沖縄（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 秋田利之
2. 発表標題 Coxeterカンドルとルート系の随伴群
3. 学会等名 2018年度ホモトピー論シンポジウム
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 秋田利之
2. 発表標題 Coxeterカンドルの随伴群
3. 学会等名 九州大学数理談話会（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 秋田利之
2. 発表標題 Coxeter群とArtin群のコホモロジーについて
3. 学会等名 九州大学トポロジー金曜セミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 秋田利之
2. 発表標題 Central extensions of Coxeter groups and Artin groups
3. 学会等名 Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2019（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 秋田利之
2. 発表標題 Coxeter groups, Artin groups and Coxeter quandles
3. 学会等名 研究集会「ストリングトポロジーとその周辺」（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 秋田利之
2. 発表標題 On the cohomology of Coxeter groups and related groups
3. 学会等名 The Third Pan Pacific International Conference on Topology and Applications (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 秋田利之
2. 発表標題 Artin群とCoxeterカンドルの随伴群のコホモロジー
3. 学会等名 森本雅治先生退職記念研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	吉永 正彦 (Yoshinaga Masahiko) (90467647)	北海道大学・大学院理学研究院・教授 (10101)	
連携研究者	佐藤 隆夫 (Satoh Takao) (70533256)	東京理科大学・理学部・准教授 (32660)	
連携研究者	野坂 武史 (Nosaka Takefumi) (00646903)	東京工業大学・理学院・准教授 (12608)	