

令和 3 年 5 月 18 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K05239

研究課題名(和文) 結び目群の表現と量子不変量の漸近挙動

研究課題名(英文) Asymptotic behaviors of quantum invariants of knots and three-manifolds

研究代表者

村上 斉 (Murakami, Hitoshi)

東北大学・情報科学研究科・教授

研究者番号：70192771

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：結び目の色付きJones多項式の漸近挙動の位相的意味を研究した。特に、反復トーラス結び目に対し、色付きJones多項式の漸近展開から、結び目補空間のChern-Simons不変量やねじれReidemeister torsionが読み取れることを証明した。また、色付きJones多項式のパラメータに現れる複素数と、Chern-Simons不変量やReidemeister torsionを定義する際に使われるパラメータの関係を明らかにした。これが、結び目群から、リー群 $SL(2;C)$ への表現を定めるパラメータであることもわかった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は、結び目の体積予想に動機づけられている。

体積予想は、R. Kashaev氏によって提唱された予想を村上順氏と研究代表者によって今の形に拡張・整理されたものであり、「結び目の色付きJones多項式のある種の極限は、その結び目補空間の体積を決定する」と述べることができる。この予想は結び目理論研究者をはじめとする位相幾何学者のみならず理論物理学者も注目するものとなった。

本研究は、本来の体積予想をさらに拡張した予想に関する研究であり、体積予想を研究する上でも価値があると信じる。

研究成果の概要(英文)：We study a topological interpretation of the asymptotic behavior of the colored Jones polynomial of a knot.

Especially, we show that for an iterated torus knot, one can obtain the Chern-Simons invariant and the twisted Reidemeister torsion of the knot complement from the asymptotic expansion of the colored Jones polynomial. Moreover, we obtain a relationship of the complex number in the parameter of the colored Jones polynomial to the parameter used to define the Chern-Simons invariant and the Reidemeister torsion. Indeed, we prove that this parameter determines a representation of the knot group to the Lie group $SL(2;C)$.

研究分野：位相幾何学

キーワード：結び目 色付きJones多項式 量子不変量 体積予想 Chern-Simons不変量 ねじれReidemeister torsion

1. 研究開始当初の背景

結び目 K の色付き Jones 多項式を $J_M(K; q)$ と書く。
 村上順氏と研究代表者は、 N のときの $J_M(K; \exp(2\pi i/M))$ の漸近挙動を調べることで、結び目 K の補空間の単体的体積が分かるであろうという予想(体積予想)を提唱した。これは R. Kashaev 氏による予想を一般化したものであり、多くの研究者の注目を集めている。
 これまでは、単純な結び目(補空間にある非圧縮円環面は、結び目の管状近傍の境界に平行なものに限るような結び目)の場合を中心に研究が行われてきた。
 特に、双曲結び目(補空間に有限体積の完備双曲構造が入るような結び目)やトーラス結び目(下記参照)と呼ばれる結び目の族に関しては、研究分担者の樋上氏や研究代表者を含む研究者によって、多くの研究がなされてきた。
 また、上記体積予想の一般化として、 $2\pi i$ とは限らない複素数 q に対し $J_M(K; \exp(q/M))$ の漸近挙動を調べたり(一般化体積予想)、体積の複素化ともいえる Chern-Simons 不変量やねじれ Reidemeister torsion との関係調べたり(精密化体積予想)といったことも研究代表者をはじめとする研究者によって行われてきた。

2. 研究の目的

単純とは限らない結び目に関する(一般化・精密化)体積予想を研究することが目的である。具体的には、色付き Jones 多項式 $J_M(K; \exp(q/M))$ の N における漸近挙動と、結び目補空間の基本群の様々な $SL(2; \mathbb{C})$ 表現に対応した Chern-Simons 不変量やねじれ Reidemeister torsion の関係を調べる。
 特に、今回は反復トーラス結び目を中心に研究を行なう。ここで、トーラス結び目とは、図1に示したような、3次元空間に標準的に埋め込まれたトーラスの表面にある結び目のことであり、反復トーラス結び目とは、図2に示したような、トーラス結び目の管状近傍の表面にある結び目のことである。反復トーラス結び目は4つの整数の組で表すことができ、色付き Jones 多項式も具体的に書き下すことができる。

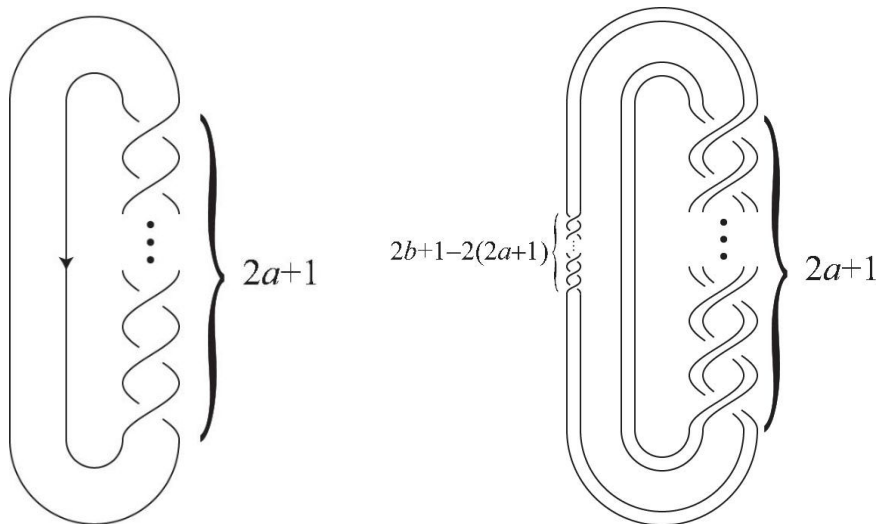


図1 トーラス結び目 $T(2, 2a+1)$

図2 反復トーラス結び目 $T(2, 2a+1)^{(2, 2b+1)}$

また、反復トーラス結び目 $T(2, 2a+1)^{(2, 2b+1)}$ の基本群は比較的簡単に表示することができ、 $SL(2; \mathbb{C})$ への表現もすべて書き下すことができる。そこで、それらの表現に対応する Chern-Simons 不変量とねじれ Reidemeister torsion を計算することで、色付き Jones 多項式の漸近挙動との関係を見つける。

3. 研究の方法

「研究の目的」欄で述べたように、色付き Jones 多項式の漸近挙動、基本群の表現、表現に対応した Chern-Simons 不変量とねじれ Reidemeister torsion をそれぞれ計算するのであるが、その方法は以下のとおりである。

・色付き Jones 多項式の漸近挙動の計算：最初は計算機により実際に色付き Jones 多項式の漸近挙動を調べることから始める。色付き Jones 多項式の具体的な式が知られている結び目を研究対象としているので、Mathematica を利用することで漸近挙動の数値実験を行なうことができる。

また、色付き Jones 多項式の特殊値は総和の形で与えられているため、このままでは漸近挙動を調べるのは困難である。そこで、R. Kashaev 氏と O. Tirkkonen 氏の論文を参考にして、総和を積分の形に直す。積分の形で表された量の漸近挙動は鞍点法と呼ばれる方法で求めることができる。

・基本群の表現の計算：研究対象である反復トーラス結び目の基本群を生成元と関係式を用いて表示し、それを用いて $SL(2; \mathbb{C})$ への表現を構成する。具体的な計算には Mathematica の補助が不可欠であった。また、反復トーラス結び目の補空間には非圧縮円環面が存在するので、その局面で基本群を分解することができるのであるが、それぞれの部品に対して可換か非可換かを分けて考える必要がある。(単純ではない結び目の場合、部品は一つしかないことに注意。これまで、特に一般化・精密化された体積予想の研究では、我々以外に非圧縮円環面の存在する結び目を考察した者はいないと思われる。)

・Chern-Simons 不変量とねじれ Reidemeister torsion の計算：前者は P. Kirk 氏と E. Klassen 氏の公式を利用して、基本群の表現を利用して計算ができる。特に、トーラス結び目の場合は、前述の Kashaev 氏と Tirkkonen 氏の論文でなされた計算が参考になった。後者は、今のところ定義に忠実に計算するしか方法がないので Mathematica の助けを借りて膨大な行列計算を行なった。これも単純な結び目の場合には J. Porti 氏による公式が利用できるのと比較するとかなり困難を伴った。

4. 研究成果

$2b+1 > 4(2a+1)$ という仮定のもと、反復トーラス結び目 $K := T(2, 2a+1)^{(2, 2b+1)}$ の色付き Jones 多項式 $J_M(K; \exp(-1/M))$ の漸近展開は、4 種類の和に分かれる：K の補空間を非圧縮輪環面で分解し、それぞれの基本群から $SL(2; \mathbb{C})$ への表現が、(1) (可換, 可換), (2) (可換, 非可換), (3) (非可換, 可換) (4) (非可換, 非可換) の場合である。それぞれがまた、総和の形で与えられる。

- (1) (可換, 可換) の場合：全体が可換だから、その可換表現に対応した Alexander 多項式が現れる。
- (2) (可換, 非可換) の場合：全体が非可換だから、その非可換表現に対応した Chern-Simons 不変量とねじれ Reidemeister torsion が現れる。また、この場合ねじれ Reidemeister torsion を定めるには、ある種のコホモロジー群の基底を定める必要があるが、それも位相的に自然なものを選ぶことができた。
- (3) (非可換, 可換) の場合：(2) と状況は同じである。
- (4) (非可換, 非可換) の場合：(2), (3) とほぼ同様であるが、その計算には格段の困難が伴った。特にコホモロジー群の基底は定めることができたのであるが、位相的に自然かどうかは他の例と比べる必要があるため今後の研究に俟つ必要があると思われる。

以上の結果は論文「Murakami, Hitoshi. The twisted Reidemeister torsion of an iterated torus knot. *Topology Appl.* 257 (2019), 22–66」にまとめられ出版された。

また、共著「Murakami, Hitoshi; Yokota, Yoshiyuki: “Volume conjecture for knots”, *SpringerBriefs in Mathematical Physics* 30 (ISBN 978-981-13-1149-9/pbk; 978-981-13-1150-5/ebook). ix, 120 p. (2018)」では、体積予想に関するこれまでの研究を非専門家にもわかりやすいように解説した。さらに著書「村上 斉:「結び目理論入門(上)」, 岩波書店, 2019 年」は、学部 3 年生レベルの知識をもとにした結び目理論の入門書である。

また，下記の集会を初めとするいくつかの国際研究集会でも本研究の結果を発表した．

- (1) Murakami, Hitoshi: “ An Introduction to the Volume Conjecture and its generalizations, I, II, and III ”, Workshop on Volume Conjecture and related topics in Knot Theory, 2018年12月19日,20日,21日, Indian Institute of Science Education and Research, Pune, India.

- (2) Murakami, Hitoshi: “ Introduction to the volume conjecture for knots ”, Frontiers in Mathematical Science Research Workshop --- Joint workshop with Tohoku University, Japan, 上海大学, 2019年9月27日 .

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Murakami Hitoshi	4. 巻 257
2. 論文標題 The twisted Reidemeister torsion of an iterated torus knot	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 22 ~ 66
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2019.02.012	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 K. Hikami	4. 巻 109
2. 論文標題 DAHA and skein algebra on surface: double-torus knots	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Letters in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 2305-2358
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11005-019-01189-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Fuji Hiroyuki, Kanamori Issaku, Nishigaki Shinsuke M.	4. 巻 8
2. 論文標題 Janossy densities for chiral random matrix ensembles and their applications to two-color QCD	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of High Energy Physics	6. 最初と最後の頁 53
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/JHEP08(2019)053	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Hiroyuki Fuji, Kohei Iwaki, Masahide Manabe, Ikuo Satake	4. 巻 371
2. 論文標題 Reconstructing GKZ via topological recursion	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 839-920
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-019-03590-6	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hikami Kazuhiro	4. 巻 15
2. 論文標題 Note on Character Varieties and Cluster Algebras	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications	6. 最初と最後の頁 1--32
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3842/SIGMA.2019.003	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kalman, Tamas and Murakami, Hitoshi	4. 巻 8
2. 論文標題 Root polytopes, parking functions, and the HOMFLY polynomial	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Quantum Topology	6. 最初と最後の頁 205--248
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/QT/89	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 K. Hikami and J. Lovejoy	4. 巻 11
2. 論文標題 Hecke-type formulas for families of unified Witten-Reshetikhin-Turaev invariants	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Communications in Number Theory and Physics	6. 最初と最後の頁 249--272
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/CNTP.2017.v11.n2.a1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計12件(うち招待講演 12件/うち国際学会 7件)

1. 発表者名 H. Murakami
2. 発表標題 Introduction to the volume conjecture for knots
3. 学会等名 Frontiers in Mathematical Science Research Workshop - Joint workshop with Tohoku University, Jappan -, Shanghai University, China (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 K. Hikami
2. 発表標題 DAHA and skein algebra of surfaces
3. 学会等名 Quiver Hecke algebra and its applications to topology, RIMS 合宿セミナー, 犬山 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 藤 博之
2. 発表標題 ファットグラフによる RNA の擬ノット構造に関する モデル
3. 学会等名 総研大-理研 iTHEMS 連携ワークショップ「遺伝と数理」(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 藤 博之
2. 発表標題 RNA を表現するファットグラフモデルと行列模型
3. 学会等名 名古屋大学多元数理科学研究科談話会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 村上 斉
2. 発表標題 位相的場の理論に由来する3次元多様体の不変量 (MOOとWRT)
3. 学会等名 Summer School 数理物理 2018 (位相的場の量子論) (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hitoshi Murakami
2. 発表標題 The volume conjecture for cable knots
3. 学会等名 Volume Conjecture in Tokyo (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hitoshi Murakami
2. 発表標題 An Introduction to the Volume Conjecture and its generalizations, I, II, and III
3. 学会等名 Workshop on Volume Conjecture and related topics in Knot Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hitoshi Murakami
2. 発表標題 Volume conjecture for knots
3. 学会等名 QUANTUM SYMMETRIES AND INTEGRABLE SYSTEMS (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kazuhiro Hikami
2. 発表標題 On Kauffman bracket skein algebra and DAHA
3. 学会等名 Volume Conjecture in Tokyo (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroyuki Fuji
2. 発表標題 Reconstructing GKZ via topological recursion
3. 学会等名 Physics Seminar, Korea Institute of Advanced Study (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 K. Hikami
2. 発表標題 Quantum invariants for knots/3-manifolds and modular forms
3. 学会等名 Trends in Modular Forms (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 K. Hikami
2. 発表標題 Quantum modular forms I, II
3. 学会等名 Indefinite Theta Functions and Applications in Physics & Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計2件

1. 著者名 村上 斉	4. 発行年 2019年
2. 出版社 岩波書店	5. 総ページ数 342
3. 書名 結び目理論入門(上)	

1. 著者名 Murakami, Hitoshi and Yokota, Yoshiyuki.	4. 発行年 2018年
2. 出版社 Springer	5. 総ページ数 132
3. 書名 Volume conjecture for knots	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	樋上 和弘 (Hikami Kazuhiro) (60262151)	九州大学・数理学研究院・准教授 (17102)	
研究分担者	藤 博之 (Fuji Hiroyuki) (50391719)	大阪工業大学・情報科学部・教授 (34406)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Modular Forms and Quantum Knot Invariants	開催年 2017年～2017年
---	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------