

令和 5 年 6 月 13 日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2022

課題番号：17K05240

研究課題名(和文) 双曲構造の退化におけるライデマイスタートーションの漸近挙動の収束

研究課題名(英文) The asymptotic behavior of the Reidemeister torsion for degenerate hyperbolic structures

研究代表者

山口 祥司 (YAMAGUCHI, Yoshikazu)

早稲田大学・商学大学院・准教授

研究者番号：30534044

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：三次元多様体とその幾何構造から定まるライデマイスタートーションという位相不変量の系列の漸近挙動を力学系のゼータ関数を利用して考察した。本研究では錐特異点をもつ曲面の単位接束とみなせる三次元多様体において、曲面の測地線流が定める力学系のゼータ関数の値が三次元多様体のライデマイスタートーションの値を与えることを明らかにした。さらにライデマイスタートーションの系列の漸近挙動をゼータ関数の値の極限として記述することにより、ライデマイスタートーションの漸近挙動から曲面の面積やオイラー標数といった値が導出される原理を明らかにすることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

三次元多様体とその幾何構造が定めるライデマイスタートーションという位相不変量の系列と多様体の体積といった解析的な量の関係は双曲三次元多様体においては力学系のゼータ関数を利用することで研究されていた。本研究では非双曲三次元多様体(ザイフェルト多様体)においても、その幾何構造に関わるライデマイスタートーションの漸近挙動を力学系のゼータ関数を利用した解析的な手法で記述・考察することが可能であり、錐特異点をもつ曲面の面積が導出される現象を明らかにした。代数的・組み合わせ的な手法で主に研究されてきた非双曲三次元多様体(ザイフェルト多様体)においても解析的な手法の有効性を示した点に学術的意義がある。

研究成果の概要(英文)：We can define a sequence of topological invariants called Reidemeister torsions for a 3-manifold and its geometric structure. I studied the asymptotic behavior for the sequence of Reidemeister torsions using a dynamical zeta function of a 3-manifold. In this study, I revealed that the dynamical zeta function defined by the geodesic flow on a 2-dimensional orbifold gives the Reidemeister torsion for unit tangent bundle over the orbifold. Moreover I have described the asymptotic behavior of higher-dimensional Reidemeister torsions for a unit tangent bundle over a 2-dimensional orbifold as the limit of the dynamical zeta function. According to the observation by the dynamical zeta function, I also presented how we can derive the area or Euler characteristic of the orbifold from the asymptotic behavior of Reidemeister torsions.

研究分野：位相幾何学

キーワード：漸近挙動 ライデマイスタートーション 力学系 ゼータ関数 位相不変量 双曲多様体 幾何構造 基本群の表現

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

三次元多様体において、基本群から特殊線形群 $SL(2;C)$ への準同型写像から $SL(2;C)$ の表現論的手法によりライデマイスタートーションという位相不変量の系列を構成することができる。幾何構造をもつ三次元多様体に対して、幾何構造に関わる基本群から $SL(2;C)$ への準同型写像を利用してライデマイスタートーションの系列の漸近挙動と多様体の幾何学的性質の関係について先行研究が行われていた。双曲三次元多様体ではライデマイスタートーションの漸近挙動を力学系のゼータ関数を利用した解析的手法により多様体の双曲体積が導出でき、非双曲三次元多様体(ザイフェルト多様体)では研究代表者により多様体のファイブレーション構造に現れる(錐特異点をもつ)曲面のオイラー標数が代数的・組み合わせ的に導出できる可能性が示されていた。

本研究開始時点では、代数的・組み合わせ的方法で非双曲三次元多様体(ザイフェルト多様体)におけるライデマイスタートーションの漸近挙動は考察できていたが、双曲三次元多様体のような力学系のゼータ関数を利用した解析的な手法による考察が可能かどうかは不明な状態であった。

2. 研究の目的

非双曲三次元多様体(ザイフェルト多様体)におけるライデマイスタートーションの漸近挙動を双曲三次元多様体の場合のように力学系のゼータ関数を利用した解析的な手法によって記述し、非双曲三次元多様体においてもライデマイスタートーションの漸近挙動を解析的な方法で考察する方法を確立する。

三次元多様体の基本群から特殊線形群 $SL(2;C)$ への準同型写像は、三次元多様体の幾何構造の変形パラメータとみなすことができる。双曲三次元多様体の双曲構造はホロのミー表現とよばれる基本群から $SL(2;C)$ への準同型写像を定め、この準同型写像は非双曲的な幾何構造に由来する準同型写像へ変形できることがある。この現象を本研究では双曲構造の退化とよぶことにする。基本群の準同型写像という幾何構造の変形パラメータの変化のもとで、双曲構造の退化からライデマイスタートーションの漸近挙動が受ける影響をライデマイスタートーションの漸近挙動を記述する力学系のゼータ関数を通して考察し、ゼータ関数の解析的性質を利用して解明する。

3. 研究の方法

非双曲三次元多様体(ザイフェルト多様体)のライデマイスタートーションの漸近挙動を力学系のゼータ関数を利用した解析的な手法で研究するために、非双曲三次元多様体として錐特異点をもつ曲面の単位接束とみなせる三次元多様体を選び、ライデマイスタートーションを力学系のゼータ関数を利用して記述する。錐特異点をもつ曲面の単位接束とみなせる三次元多様体を選ぶ理由は、曲面においては力学系のゼータ関数の研究が進んでおり、特に測地線流とよばれる力学系は曲面の単位接束とみなせる三次元多様体のライデマイスタートーションの研究に応用できることが先行研究から期待できるからである。錐特異点をもつ曲面の単位接束という三次元多様体に対して、曲面上の測地線流が定める力学系のゼータ関数を利用して三次元多様体のライデマイスタートーションの値を記述する。力学系のゼータ関数のもつ関数等式を活用し、ライデマイスタートーションの漸近挙動を詳しく記述・考察する。

双曲構造の退化については、基本群から $SL(2;C)$ への準同型写像やその変形が詳しく調べられている三次元多様体(8の字結び目の補空間など)において、準同型写像の変形のもとで力学系のゼータ関数の変化の様子を調べ、双曲構造の退化が与えるライデマイスタートーションの漸近挙動への影響をゼータ関数の解析的性質を利用して記述する。

4. 研究成果

錐特異点をもつ曲面の単位接束とみなせる三次元多様体において、多様体の幾何構造が定める基本群から $SL(2;C)$ への準同型写像によってライデマイスタートーションの系列を構成し、系列に現れるライデマイスタートーションを曲面の測地線流が定める力学系のゼータ関数の値とみなせることを証明できた。さらにライデマイスタートーションの系列の漸近挙動をゼータ関数の解析的な性質を利用して記述・考察することができた。研究代表者が代数的・組み合わせ的な手法によってライデマイスタートーションの漸近挙動から得ていた曲面のオイラー標数という値はゼータ関数を利用した解析的な手法によって曲面の面積という解析的な量ともみなせることを明らかにできた。得られた考察結果をまとめた論文「Dynamical zeta functions for

geodesic flows and the higher-dimensional Reidemeister torsion for Fuchsian groups」は、学術雑誌 Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)から出版されている。

双曲三次元多様体の双曲構造の退化がライデマイスタートーションの漸近挙動に与える影響を考察する研究については、双曲構造の退化を 8 の字結び目の補空間などの具体的な双曲多様体において双曲構造のパラメータ集合を調べる段階にとどまり、残念ながら力学系のゼータ関数の変化の様子やライデマイスタートーションの漸近挙動に与える影響を記述する段階には到達しなかった。

本研究期間では、ライデマイスタートーションの漸近挙動と双曲構造の退化に関わる成果をまとめた論文も以下のように出版している。錐特異点をもつ曲面の単位接束を含むザイフェルト多様体という非双曲三次元多様体のクラスにおいて、ライデマイスタートーションの系列の漸近挙動を代数的・組み合わせ的手法で考察した結果をまとめた論文「surgery formula for the asymptotics of the higher-dimensional Reidemeister torsion and Seifert fibered spaces」を学術雑誌 Indiana University Mathematics Journal から出版している。双曲結び目の補空間という双曲三次元多様体から非双曲三次元多様体を構成する例外手術とよばれる手続きは双曲三次元多様体の双曲構造の退化現象とみなせる。双曲結び目の補空間と双曲結び目の例外手術と関わりが深い基本群から $SL(2; \mathbb{C})$ への準同型写像が定めるライデマイスタートーションについて、テキサス大学の Anh Tran 氏と共同で行った研究をまとめた論文「Higher dimensional twisted Alexander polynomials for metabelian representations」と「The asymptotics of the higher dimensional Reidemeister torsion for exceptional surgeries along twist knots」もそれぞれ学術雑誌 Topology and its Applications と Canadian Mathematical Bulletin から出版することができた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yamaguchi Yoshikazu	4. 巻 784
2. 論文標題 Dynamical zeta functions for geodesic flows and the higher-dimensional Reidemeister torsion for Fuchsian groups	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)	6. 最初と最後の頁 155 ~ 176
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/crelle-2021-0075	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yoshikazu Yamaguchi	4. 巻 2
2. 論文標題 A surgery formula for the asymptotics of the higher-dimensional Reidemeister torsion and Seifert fibered spaces	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Indiana University Mathematics Journal	6. 最初と最後の頁 463--493
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1512/iumj.2017.66.6012	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Anh T. Tran, Yoshikazu Yamaguchi	4. 巻 229
2. 論文標題 Higher dimensional twisted Alexander polynomials for metabelian representations	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 42--54
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.topol.2017.07.003	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Anh T. Tran, Yoshikazu Yamaguchi	4. 巻 61
2. 論文標題 The asymptotics of the higher dimensional Reidemeister torsion for exceptional surgeries along twist knots	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Canadian Mathematical Bulletin	6. 最初と最後の頁 211--224
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4153/CMB-2017-021-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 6件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 山口 祥司
2. 発表標題 Dynamical zeta functions for geodesic flows and the higher-dimensional Reidemeister torsion for Fuchsian groups
3. 学会等名 京都大学微分トポロジーセミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 山口 祥司
2. 発表標題 Dynamical zeta functions for geodesic flows and the higher-dimensional Reidemeister torsion for Fuchsian groups
3. 学会等名 東京電機大学 数学講演会（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 山口 祥司
2. 発表標題 Dynamical zeta functions for geodesic flows and the higher-dimensional Reidemeister torsion for Fuchsian groups
3. 学会等名 日本数学会東北支部会（特別講演）（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 山口 祥司
2. 発表標題 Anosov flow and the higher-dimensional Reidemeister torsion
3. 学会等名 Workshop「New development of low-dimensional topology」（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山口 祥司
2. 発表標題 Twisted Alexander invariants and metabelian representations
3. 学会等名 Friday Seminar on Knot Theory (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山口 祥司
2. 発表標題 ねじれアレキサンダー不変量の漸近挙動と結び目の外部空間の幾何構造について
3. 学会等名 筑波大学トポロジーセミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山口 祥司
2. 発表標題 Higher-dimensional twisted Alexander invariants for metabelian representations
3. 学会等名 日本数学会トポロジー分科会一般講演
4. 発表年 2017年～2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Volume Conjecture in Tokyo	開催年 2018年～2018年
--------------------------------------	--------------------

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------