

令和 3 年 6 月 14 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K05243

研究課題名(和文) 二次特性類の幾何

研究課題名(英文) Geometry of secondary characteristic classes

研究代表者

寺嶋 郁二 (Terashima, Yuji)

東北大学・理学研究科・教授

研究者番号：70361764

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円

研究成果の概要(和文)：研究代表者は、トポロジー、数理物理、数論をつなげる研究を推進し、永井渡氏との共同研究で、クラスター変数の特殊化と二橋結び目のアレクサンダー多項式との一致を示すことができた。また、Junhyeong Kim・森下昌紀・野田健夫氏との共同研究で、3次元多様体上の葉層構造と数体との類似を追及し、Beilinson, Bloch, Deligne 氏らのリーマン面における相互律を一般化する数論トポロジーでの結果を得た。また、藤博之・岩木耕平・村上斉氏との共同研究でWRT関数を導入しザイフェルト・ループのWRT不変量たちを1のべき根たちへの特殊化で復元することを示すことができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

トポロジーと数理物理と数論をつなぐ新しい成果を得られたことにより、個々の分野の視点では今まで全く見えていなかったものが統一的に考えられるようになった。このことは新たな研究分野を創設することにもつながるものであり、分野を横断する研究を発展させることを今後も続けていきたい。

研究成果の概要(英文)：Connecting topology to mathematical physics and number theory, we prove that specializations of cluster variables are identified with Alexander polynomials of 2-bridge knots in a joint work with Wataru Nagai, and get a result in arithmetic topology generalizing the reciprocity law about Riemann surfaces to 3-dimensional manifolds based on an analogy between foliated structures on 3-manifolds and number fields in a joint work with Junhyeong Kim, Masanori Morishita and Takeo Noda. Moreover, we introduce WRT functions, and prove that specializations of WRT functions to roots of unity are identified with WRT invariants for Seifert loops in a joint work with Hiroyuki Fuji, Kohei Iwaki and Hitoshi Murakami.

研究分野：トポロジー, 数理物理

キーワード：トポロジー 数理物理 特性類 クラスター代数 数論トポロジー 量子ダイログ関数 量子不変量 超対称ゲージ理論

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

二次特性類は様々な分野，特にトポロジー，数論，ゲージ場の物理に共通して現れる．そこで，二次特性類を手がかりにしてトポロジー，数論，ゲージ場の物理を統一的な視点から調べることをはじめた．もともと，トポロジーにおいて，特性類は決定的な役割を果たしてきた．多様体が複素構造や葉層構造のようなより精密な構造を持つとき，その構造を感知するより精密な特性類（二次特性類）が必要になる．二次特性類は，その精密さゆえに，数論幾何，ゲージ場の物理のような様々な場所に思いがけず現れ，重要な役割を果たす．二次特性類に着目した出発点の一つとして，五味清紀氏（信州大学）と研究代表者の共同研究

K. Gomi, Y. Terashima, Chern-Weil construction for twisted K-theory, *Comm. Math. Phys.* 299 (2010), no. 1, 225--254.

K. Gomi, Y. Terashima, Discrete torsion phases as topological actions, *Comm. Math. Phys.* 287 (2009), no. 3, 889--901.

K. Gomi, Y. Terashima, Higher-dimensional Parallel Transports, *Math. Res. Lett.* 8, 2001, no. 1, 25-35.

K. Gomi, Y. Terashima, A Fiber Integration Formula for the Smooth Deligne Cohomology, *IMRN*, 2000, no. 13, 699-708.

で発展させたねじれ K 理論の特性類の明示的な構成と滑らかなドリーニュ・コホモロジーの積分理論が，二次特性類のレギュレーターに有効であろう，と考えたことにある．レギュレーターは数論幾何に現れる具体的な二次特性類であり，代数多様体の代数的ベクトル束の高次の代数的 K 群の特性類であるレギュレーターは，導入されるとすぐにベイリンソン予想などの数論幾何の様々な場面で中心的な役割を担った．しかし，具体的にレギュレーターを計算しようとすると，たちまち，困難が現れる．その主な理由は，現在知られているレギュレーターの構成方法が，いずれも存在定理を用いていて，明示的な構成ではないことにあると考えられる．実際に，上で述べた五味清紀氏と研究代表者との共同研究で発展させた理論を用いると，零次の代数的 K 群の場合には，レギュレーターの明示的な構成をすることができた．この構成の主な利点は二つあった．一つは，代数幾何的な枠組みを出ることで，微分形式のフィルターづけが与えられているときに，いつでも適用できる設定になっていることである．例えば，葉層構造の場合に，この方法を適用して得られる特性類は，ドリーニュ・コホモロジーの葉層構造版に値をもつ新しい特性類であり，レギュレーターの数論幾何における重要性を考えると，研究する価値があると考えた．もう一つの利点は，付加的な道具である接続の局所的な族を選ぶと，二次特性類がコサイクルのレベルで得られることである．このことは，具体的な計算を実行しようとするときに決定的に重要である．つまり，付加的な道具をうまく選ぶことで，計算可能な局所的な式を得るという方法が使えるようになる．この有用性は，例えば，特性類（古典的なオイラー類や I. M. Gelfand たちによる第一ポントリャーギン類の場合など）の組み合わせ的な式が，付加的な道具に対応するコサイクルの式を得てから，単体分割にうまく合う付加的な道具を適用するという二段階で得られることを考えるとはっきりする．そこで，この零次の代数的 K 群でうまくいった構成を高次の代数的 K 群の場合に拡張し，数論的に重要な多様体上でレギュレーターの具体的な計算を実行することを考えた．実際に，このような特性類に対応するべきものが森下昌紀氏と研究代表者の共同研究

M. Morishita, Y. Terashima, Geometry of polysymbols, *Math. Res. Lett.* 15, 2008, no. 1, 95-115.

M. Morishita, Y. Terashima, Chern-Simons variation and Deligne cohomology, *Contemp. Math.* 484, 2009, 127--134.

をしている過程に現れ，それを具体的な計算によって特定したいということが研究代表者の動機の一つであった．

また，レギュレーターと双曲体積に共通に現れる多重対数関数はゲージ場の物理にも思いがけず現れている．実際に，山崎雅人氏と研究代表者の共同研究

Y. Terashima, M. Yamazaki, Emergent 3-manifolds from four dimensional superconformal indices, *Phys. Rev. Lett.* 109, (2012) 091602.

で 3 次元双曲幾何とゲージ場の物理との間の新しい関係を発見した。この発見はゲージ場の物理の分配関数に現れた多重対数関数を双曲幾何の言葉で解釈しようとする試みを一つの出発点とし、研究の過程で、双曲幾何だけでなく、ゲージ場の物理にも高次の代数的 K 群が見え隠れしているのが分かった。このように、二次特性類の研究を通して、数論幾何と双曲幾何とゲージ場の物理のより深い関係が見つけれられるのではないかと考えた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、二次特性類を手がかりにして、トポロジーと数論幾何とゲージ場の物理の間に橋をかけ、今までになかった統一的視点を得ることにある。特に、数論幾何におけるレギュレーターとトポロジーにおける双曲多様体の双曲体積とゲージ理論の分配関数の関係をより具体的に理解したい。

3. 研究の方法

クイバーのミュートーションや双曲的 3 次元多様体の理想四面体分割やクラスター変換などを用いて、分配関数や双曲体積などの明示的な表示を得ることや具体的な計算を実行することと、その計算をゲージ場の物理や数論の全く別の文脈で新しい解釈を与えることに研究の方法の特徴がある。

4. 研究成果

トポロジー、数理物理、数論をつなげる研究を推進し、その成果としてクイバーのミュートーションの列に付随する分配関数を導入し、その基本的な性質、特に量子ダイログ関数との関係を確立した加藤晃史・水野勇磨氏との研究成果をまとめた論文が

A. Kato, Y. Mizuno, Y. Terashima, Quiver mutation sequences and qbinomial identities, IMRN, Issue 23 (2018), 7335-7358

として学術論文誌に掲載された。クイバーのミュートーションの列に付随する分配関数は q 二項係数を用いて定義される多項式であり、それが無限積である量子ダイログ関数のある種の比として表される点は、様々な文脈で現れるクイバーのミュートーションの列に応じて異なる興味深い解釈があると思われ、これからの発展が期待できる。また、クラスター代数と結び目の位相的不変量であるアレクサンダー多項式の新しい関係の発見としてクラスター変数の特殊化と二橋結び目のアレクサンダー多項式が一致することを示した永井氏との研究成果をまとめた論文を

W. Nagai, Y. Terashima, Cluster variables, ancestral triangles and Alexander polynomials, arXiv:1812.02434, Adv. Math. 363 (2020)

として公表し、学術論文誌に掲載された。また、クラスター変換と双曲三次元多様体の双曲体積との新しい関係を発見した長尾健太郎氏、山崎雅人氏との研究成果をまとめた論文が

Kentaro Nagao, Yuji Terashima, Masahito Yamazaki, Hyperbolic 3-manifolds and cluster algebras. Nagoya Math. J. 235 (2019), 1-25

として学術論文誌に掲載された。また、3 次元多様体上の葉層構造と数体との類似を追及し、Beilinson, Bloch, Deligne 氏らのリーマン面における相互律を一般化する数論トポロジーでの結果を得た Junhyeong Kim・森下昌紀・野田健夫氏との研究成果をまとめた論文を

Junhyeong Kim, Masanori Morishita, Takeo Noda, Yuji Terashima, On 3-dimensional foliated dynamical systems and Hilbert type reciprocity law, arXiv:1906.02424, to appear in Munster Math. J.

として公表し、学術論文誌に掲載されることになった。また、藤博之・岩木耕平・村上斉氏との共同研究で、ザイフェルト・ループについて WRT 関数を導入し、1 のべき根での値が WRT 不変量と一致することと、WRT 関数が A 多様体の量子化である q 差分方程式を満たすことを示した研究成果をまとめた論文を

H. Fuji, K. Iwaki, H. Murakami, Y. Terashima, Witten-Reshetikhin-Turaev function for

a knot in Seifert manifolds, arXiv:2007.15872, to appear in Comm. Math. Phys.

として公表し, 学術論文誌に掲載されることになった. これらの成果は, トポロジーと数理物理と数論の橋渡しになる結果であり, さらに深めていきたい.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Fuji Hiroyuki, Iwaki Kohei, Murakami Hitoshi, Terashima Yuji	4. 巻 -
2. 論文標題 Witten-Reshetikhin-Turaev Function for a Knot in Seifert Manifolds	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00220-021-03953-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Nagai Wataru, Terashima Yuji	4. 巻 363
2. 論文標題 Cluster variables, ancestral triangles and Alexander polynomials	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 106965 ~ 106965
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.aim.2019.106965	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 NAGAO KENTARO, TERASHIMA YUJI, YAMAZAKI MASAHIKO	4. 巻 235
2. 論文標題 HYPERBOLIC 3-MANIFOLDS AND CLUSTER ALGEBRAS	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Nagoya Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 1 ~ 25
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1017/nmj.2017.39	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kato Akishi, Mizuno Yuma, Terashima Yuji	4. 巻 23
2. 論文標題 Quiver Mutation Sequences and q -Binomial Identities	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 7335 ~ 7358
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/imrn/rnx108	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kitayama Takahiro, Morishita Masanori, Tange Ryoto, Terashima Yuji	4. 巻 370
2. 論文標題 On certain SL_2 -functions for deformations of knot group representations	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 3171 ~ 3195
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/tran/7037	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kodani Hisatoshi, Morishita Masanori, Terashima Yuji	4. 巻 53
2. 論文標題 Arithmetic Topology in Ihara Theory	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 629 ~ 688
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/PRIMS/53-4-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計0件

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------