

令和 5 年 6 月 22 日現在

機関番号：12608
研究種目：基盤研究(C) (一般)
研究期間：2017～2022
課題番号：17K05244
研究課題名(和文) Knots, Floer homology, and combinatorics

研究課題名(英文) Knots, Floer homology, and combinatorics

研究代表者

KALMAN Tamas (Kalman, Tamas)

東京工業大学・理学院・准教授

研究者番号：00534041

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、低次元トポロジーと代数的組合せ論が交差する一連のアイデアを探求した。トポロジーの面ではフロア理論とホムフライ多項式との間の驚くべきつながりがタイトな接触構造を導入することで強化され、組合せ論では、以前提唱した内部多項式および外部多項式の理論が2方向に拡張された。第一に、ハイパーグラフとポリマトロイドの文脈で、2つの多項式は共通の2変数の拡張に統一された。第二に、任意の有向グラフの内部多項式が導入されいくつかの魅力的な性質が発見された。グラフの任意のリボン構造に基づいてこれらの多項式を計算するアルゴリズムを開発したことで、初めてこの重要な多項式の系統的な計算が可能になった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

BernardiとPostnikovとの共同研究であるTutte多項式のまだ最も一般的なバージョンに関する結果は、文献の基本的な部分になる可能性がある。トートメッシュと共に開発した対称辺多面体の h^* 多項式(ひいては $h^*(1)$ 、体積)を計算するアルゴリズムは、倉本モデルとの関連から、数学以外の分野でも興味を持たれるはずである。

研究成果の概要(英文)：I explored a set of ideas at the intersection of low-dimensional topology and algebraic combinatorics. On the topology side, a surprising connection between Floer theory and the Homfly polynomial was strengthened by the introduction of tight contact structures into the picture. In combinatorics, my previous theory of interior polynomials was extended in two separate directions. In the context of hypergraphs and polymatroids, the two polynomials were unified in a common two-variable extension, which is also a far-reaching generalization. The interior polynomial of an arbitrary directed graph was introduced and some of its attractive properties were discovered. Here as a special case, any undirected graph gives rise to a bidirected graph, and the interior polynomial of the latter is nothing but the h^* -polynomial of the so-called symmetric edge polytope. I developed an algorithm to compute these polynomials based on an arbitrary ribbon structure of the graph.

研究分野：Topology

キーワード：low-dimensional topology algebraic combinatorics

1. Background in the Beginning of the Research

The research that I carried out was part/continuation of a larger project that I started more than 10 years ago. It aims to express certain quantum knot invariants, hopefully all the way up to Khovanov-Rozansky homology, by using some newly developed combinatorial objects. An early success was the introduction of two such objects, called the interior and exterior polynomials. These are one-variable polynomials that can be associated to hypergraphs (or, more generally, to polymatroids). Here a hypergraph can be naturally extracted from the so-called Seifert graph of a knot diagram.

In early 2017 I had already published two foundational papers on interior and exterior polynomials, and had proven that a certain top-degree part of the Homfly polynomial (which is the Euler characteristic of Khovanov-Rozansky homology) of a special alternating link can be expressed as an interior polynomial. Furthermore, my coauthors and I had established a bond between hypergraphs and the interior polynomial on the one hand, and Floer theoretical invariants of sutured manifolds on the other. The resulting direct connection between Floer homology and the Homfly polynomial was the first result of its kind. Thus I can say that I had sufficient expertise not only in low-dimensional topology but also in algebraic combinatorics, in particular in the Ehrhart theory of lattice polytopes, to which interior polynomials are very closely related.

2. The Purpose of the research

In the last 25 years, much of low-dimensional topology has been dominated by two theories: Khovanov homology (and the even more general Khovanov-Rozansky homology), which is a categorified quantum knot invariant; and Floer homology, which can be associated to knots and three-dimensional manifolds. (The latter can be defined by various chain complexes, the most popular of which is called Heegaard Floer theory.) The two theories have many formal similarities and are expected to have a deep connection. Results in this direction do exist but are scarce.

My research aims at tackling this problem from a new direction, namely by utilizing the combinatorics of lattice polytopes. Very roughly speaking, the polytopes would be supplied by Floer theory, where they appear as sets of supporting spin-c structures for Floer homologies of various manifolds. Then, quantum invariants would be derived from the polytopes by applying certain functors to them. A model case of such a functor is the so-called h^* -polynomial of a lattice polytope, which is a well-established object in what is known as Ehrhart theory. It is clear, however, that the h^* -polynomial needs to be suitably adapted to our situation and also that further functors need to be introduced.

Therefore a very important secondary goal of my research is to study h^* -polynomials (find out about their properties and ways of computing them), and to extend Ehrhart theory to discrete structures in a lattice that are not necessarily convex, that may not be sets but rather multisets, and so on.

3. Research methodology

On a basic level, in knot theory we need to deal with the issue that diagrams of knots and oriented links are highly non-unique. But this is not only a problem, it can also be an opportunity. Knots and links are often presented as closed braids, indeed this is how Khovanov-Rozansky homology is defined. Having said that, a distinguishing feature of my work is that I prefer to draw knots and links as special diagrams, that is, in such a way that one of the Tait graphs coincides with the Seifert graph. (Braids and special diagrams are opposites: Seifert circles of the former are concentrically nested, whereas Seifert circles of the latter do not overlap at all.) This is also always possible and the cube of resolutions model of Khovanov homology applies to it just as well. Crucially, having a special diagram allows for the construction of certain sutured manifolds, some of which are closely related to the branched double cover of the knot or link. The Floer homologies of these sutured manifolds provide the key connection between topology and the algebraic combinatorics of lattice polytopes. In my research I study these homologies intensively, often via generating representative examples by computer.

Being in regular contact with my collaborators, preferably in person, is also essential.

4. Research achievements

In early 2017 I visited Daniel Mathews at Monash University in Melbourne, Australia. We finished a paper then in which we classified tight contact structures on the same sutured manifolds that I mentioned earlier. We found that they were related to Floer homology in a rather satisfying way, namely their so-called contact classes form a basis. This can be a potentially important hint at a relationship between contact topology and quantum knot invariants.

I spent the second half of 2018 and the beginning of 2019 in Cambridge, Massachusetts, as a visiting professor at MIT. During that time we carried out a research project with my host, Alexander Postnikov, and Olivier Bernardi of Brandeis University. It resulted in the discovery of a two-variable polynomial (as well as some of its natural properties) that can be associated to any polymatroid and that contains both the interior and the exterior polynomials. We published our paper in a leading journal. It gives hope of expressing further coefficients (beyond the top degree) of the Homfly polynomial, but it is also of independent interest because our polynomial is a far-reaching generalization of the Tutte polynomial that was previously defined only for graphs and matroids.

I returned to contact manifolds and Legendrian submanifolds in my joint work with two Korean colleagues, Byunghye An and Youngjin Bae. We introduced and studied ruling invariants for Legendrian graphs. The resulting paper is not closely related to the other research that I describe here.

My most recent work has been done in collaboration with Lilla Tothmeresz of Eotvos University, Budapest, Hungary. In our first joint paper, we gave a new definition for the interior polynomial of a hypergraph via ribbon structures. This relies on an elegant dissection, induced by the ribbon structure, of the so-called root polytope. (From my earlier results with Postnikov, it was known that the interior polynomial coincides with the h^* -polynomial of the root polytope.) We have extended these results away from hypergraphs and to a wider class of directed graphs. (Let me note here that a hypergraph is not only a generalization but also a special case of a graph. Yes, such a thing is possible with infinite sets.) In yet another paper we noted that our ideas can be used to compute the h^* -polynomial of another polytope, called the symmetric edge polytope of a graph. This is a rather popular topic due to its applicability in Physics. We have several other adjacent papers and a few others that are in preparation.

In February 2023 I gave a very well-received conference presentation in Kyoto on some of our results with Tothmeresz. It was my first in-person public talk since the start of the covid pandemic.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計12件（うち査読付論文 12件 / うち国際共著 12件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Tamas Kalman, Seunghun Lee, and Lilla Tothmeresz	4. 巻 42
2. 論文標題 The sandpile group of a trinity and a canonical definition for the planar Bernardi action	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Combinatorica	6. 最初と最後の頁 1283-1316
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Byung Hee An, Youngjin Bae, and Tamas Kalman	4. 巻 20
2. 論文標題 Ruling invariants for Legendrian graphs	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Symplectic Geometry	6. 最初と最後の頁 49-97
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Tamas Kalman and Lilla Tothmeresz	4. 巻 68
2. 論文標題 Root polytopes and Jaeger-type dissections for directed graphs	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Mathematika	6. 最初と最後の頁 1176-1220
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Olivier Bernardi, Tamas Kalman, and Alexander Postnikov	4. 巻 402
2. 論文標題 Universal Tutte polynomial	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 108355
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Olivier Bernardi, Tamas Kalman and Alexander Postnikov	4. 巻 -
2. 論文標題 Universal Tutte polynomial	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Tamas Kalman, Seunghun Lee and Lilla Tothmeresz	4. 巻 -
2. 論文標題 The sandpile group of a trinity and a canonical definition for the planar Bernardi action	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Combinatorica	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Byung Hee An, Youngjin Bae and Tamas Kalman	4. 巻 -
2. 論文標題 Ruling invariants for Legendrian graphs	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Symplectic Geometry	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Tamas Kalman, Lilla Tothmeresz	4. 巻 3
2. 論文標題 Hypergraph polynomials and the Bernardi process	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Algebraic Combinatorics	6. 最初と最後の頁 1099-1139
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Byung Hee An, Youngjin Bae, Tamas Kalman	4. 巻 -
2. 論文標題 Ruling invariants for Legendrian graphs	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Symplectic Geometry	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Tamas Kalman and Daniel V. Matthews	4. 巻 13
2. 論文標題 Tight contact structures on Seifert surface complements	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Topology	6. 最初と最後の頁 730-776
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Tamas Kalman and Alexander Postnikov	4. 巻 114
2. 論文標題 Root polytopes, Tutte polynomials, and a duality theorem for bipartite	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Proceedings of the London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 561-588
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/plms.12015	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Tamas Kalman and Hitoshi Murakami	4. 巻 8
2. 論文標題 Root polytopes, parking functions, and the HOMFLY polynomial	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Quantum Topology	6. 最初と最後の頁 205-248
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/QT	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計15件（うち招待講演 15件 / うち国際学会 12件）

1. 発表者名 Tamas KALMAN
2. 発表標題 The Homfly polynomial, Floer homology, and combinatorics
3. 学会等名 日本数学会秋季大会（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tamas KALMAN
2. 発表標題 Tight contact structures on Seifert surface complements
3. 学会等名 Knot Theory on Okinawa mini-symposium（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Tamas KALMAN
2. 発表標題 Tight contact structures on Seifert surface complements
3. 学会等名 東京大学（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tamas KALMAN
2. 発表標題 Tight contact structures on Seifert surface complements
3. 学会等名 ナント大学幾何学セミナー（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tamas KALMAN
2. 発表標題 Hypergraph polynomials and the Bernardi process
3. 学会等名 MIT 幾何学セミナー（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tamas KALMAN
2. 発表標題 Ribbon structures and dissections of root polytopes
3. 学会等名 ブランダイス大学 幾何学セミナー（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tamas KALMAN
2. 発表標題 Ribbon structures and dissections of root polytopes
3. 学会等名 ブラウン大学 幾何学セミナー（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tamas KALMAN
2. 発表標題 Tight contact structures on Seifert surface complements and knot invariants
3. 学会等名 ブランダイス大学 幾何学セミナー（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tamas KALMAN
2. 発表標題 Tight contact structures on Seifert surface complements
3. 学会等名 ボストンカレッジ (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tamas KALMAN
2. 発表標題 Floer homology and the HOMFLYPT polynomial
3. 学会等名 MIT 幾何学セミナー (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tamas KALMAN
2. 発表標題 Hypergraph polynomials and the Bernardi process
3. 学会等名 アメリカ数学会Spring Central and Western Joint Sectional Meeting (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tamas KALMAN
2. 発表標題 Tight contact structures on Seifert surface complements
3. 学会等名 アメリカ数学会Spring Central and Western Joint Sectional Meeting (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tamas Kalman
2. 発表標題 The Homfly polynomial and Floer homology
3. 学会等名 Twelfth East Asian School of Knots and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Tamas Kalman
2. 発表標題 The Tutte polynomial, hypergraphs, and duality
3. 学会等名 Monash University (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Tamas Kalman
2. 発表標題 The Homfly polynomial, Floer homology, and contact structures
3. 学会等名 Center for Geometry and Physics Seminar (招待講演)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	ブランダイス大学	MIT		
韓国	仁川国立大学	慶北大学校		
ハンガリー	エトヴォシュ大学			
韓国	Kyungpook National University	Incheon National University		
米国	Binghamton University	Brandeis University	MIT	
米国	MIT	ブランダイス大学	ジョージア工科大学	
韓国	韓国科学技術院	浦項工科大学校		
オーストラリア	モナシュ大学			
米国	マサチューセッツ工科大学	ハーバード大学		
フランス	ナント大学			
韓国	ポリテック大学			
オーストラリア	Monash University			