

令和 2 年 6 月 11 日現在

機関番号：12701

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K05245

研究課題名(和文)特異点論の新展開

研究課題名(英文)New Development of Singularity Theory

研究代表者

西村 尚史(NISHIMURA, Takashi)

横浜国立大学・大学院環境情報研究院・教授

研究者番号：80189307

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：以下の五つの研究プロジェクトそれぞれを研究をし、3年度間という比較的短い研究期間ではあったものの12件の査読付き論文を出版するという成果を得ることができた。さらに、12件のうち8件は国際共著論文、という状況であるので、「国際共同研究を重視して特異点論を新たな形で展開する」という本研究の当初の目的は達成された、と言える。

(1) ウルフ図形とその周辺の特異点論的研究。(2) 距離二乗写像とその周辺の研究。(3) 持ち上げ可能ベクトル場とその周辺の研究。(4) 特異点論から派生する特別な写像のカオス的研究。(5) フロントルの応用の研究。

研究成果の学術的意義や社会的意義

上記の五つの研究プロジェクトのうち「(1) ウルフ図形とその周辺の特異点論的研究」と「(2) 距離二乗写像とその周辺」のプロジェクトは、世界的にみても同様の研究が見当たらない状況の中で注目を集めつつあり、十分な学術的意義がある、と言える。

また、「(5) フロントルの応用の研究」はフロントルの新しい研究方向を切り開くものであり、表面科学等に新しい知見を与えるとともに、数学以外の分野にフロントルの重要性を知らしめることとなった意義を持つ。

尚、いずれの研究プロジェクトにおいても、既存の特異点論には存在しない観点からの研究が実践されており、特異点論の有用性を拡大した意義もある。

研究成果の概要(英文)：I studied topics in each of the following five projects. Although three fiscal years was a relatively short period, I succeeded to obtain the result of publishing as many as 12 peer-reviewed papers during the research period of this study. Moreover, since eight of the above 12 papers are international co-authored papers, I can say that the original purpose of this study "To develop Singularities Theory in a new way with an emphasis on international joint research" was achieved.

(1) Studies on Wulff shapes and related topics from the viewpoint of Singularity theory. (2) Studies on distance-squared mappings and related topics. (3) Studies on liftable vector fields and related topics. (4) Studies on special mappings derived from Singularity Theory from the viewpoint of Chaos Theory. (5) Studies on applications of frontal.

研究分野：特異点論

キーワード：ウルフ図形 フロントル 距離二乗写像 持ち上げ可能ベクトル場 特異点 可微分写像

## 1. 研究開始当初の背景

研究開始当時である 2017 年度当初では、研究代表者の研究室には韓 呼和氏 (HAN Huhe) および一木俊助氏 (ICHIKI Shunsuke) の 2 名が在籍していた。韓氏とは研究プロジェクト「(1) ウルフ図形とその周辺の特異点論的研究」に関する共同研究を行っている最中であり、一木氏とは研究プロジェクト「(2) 距離二乗写像とその周辺の研究」に関する共同研究を行っているところであった。さらに、溝田裕介氏 (九州産業大学) との間で研究プロジェクト「(3) 持ち上げ可能ベクトルとその周辺の研究」に関する共同研究も進展しているところであった。

他方、「(4) 特異点論から派生する特別な写像のカオスの研究」や「(5) フロントルの応用の研究」という研究プロジェクトについては、本研究開始当初はまだ取り掛かっていない状況であった。

## 2. 研究の目的

本研究の研究課題にあるとおり、本研究の目的は「**特異点論の新展開**」、すなわち、**新しい装いで特異点論を展開すること**である。さらに、**国際共同研究を重視して新展開することも目的**としている。

## 3. 研究の方法

数学の研究であるので、ディスカッションが基本的な方法となる。電子メールでのディスカッションももちろんありえるが、やはり直接会ってディスカッションをするほうが大幅に進展するので、本研究においては直接会ってディスカッションをする機会を多く設けるように心がけた。

たとえば、「(1) ウルフ図形とその周辺の特異点論的研究」という研究プロジェクトの場合は主として韓 呼和氏との共同研究であるが、2017 年度は韓氏は横浜国立大学に本研究を財源とした科研費研究員として滞在していたので相当な頻度で綿密なディスカッションを実施していた。また、2018 年度・2019 年度においては、研究代表者が韓氏の勤務大学である西北農林科技大学 (中国) に赴き、ディスカッションを実施した。さらに、2019 年度には日本学生支援機構の帰国外国人留学生短期研究制度により韓氏が横浜国立大学に滞在していたので、このときもまた連日のように綿密なディスカッションを実施していた次第である。

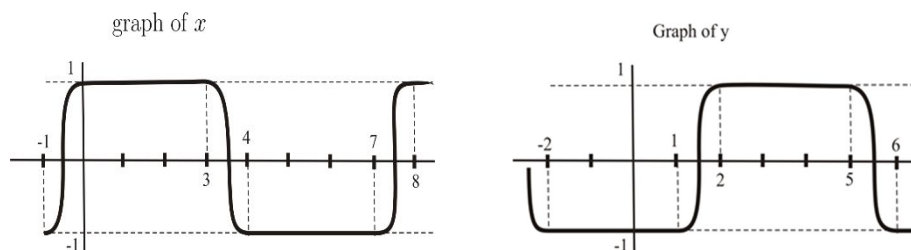
あるいは、「(5) フロントルの応用の研究」という研究プロジェクトの場合は主として Stanislaw Janeczko 氏 (ワルシャワ工科大学/ポーランド科学アカデミー・教授) との共同研究であるが、研究代表者がワルシャワ工科大学を訪問して、Janeczko 氏が横浜国立大学を訪問してディスカッションを実施している。さらに、世界各地で開催される研究集会で会うたびに共同研究のためのディスカッションを実施してきている状況である。

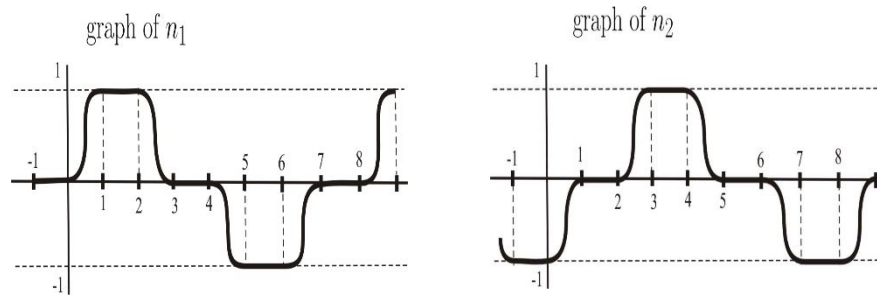
## 4. 研究成果

12 件の査読付き論文を出版しており、それらの論文の中には多くの結果を含んでいる論文も少なからずあるため、得られた具体的な成果は数多い。これらの具体的な成果をすべて解説することは膨大なスペースを要するだけでなく研究成果のわかりやすい説明とは程遠いものになってしまう懸念もある。そこで、以下では、【**最も代表的な論文**】を取り上げて、その論文内の具体的な研究成果のうち、主に海外において「**斬新で意外性があり、将来性を感じさせる**」と受け止められている具体的な結果のいくつかを概説するに留める。

【**最も代表的な論文**】 Stanislaw Janeczko and Takashi Nishimura, *Anti-orthotomics of frontals and its applications*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **487** (2020), 124019

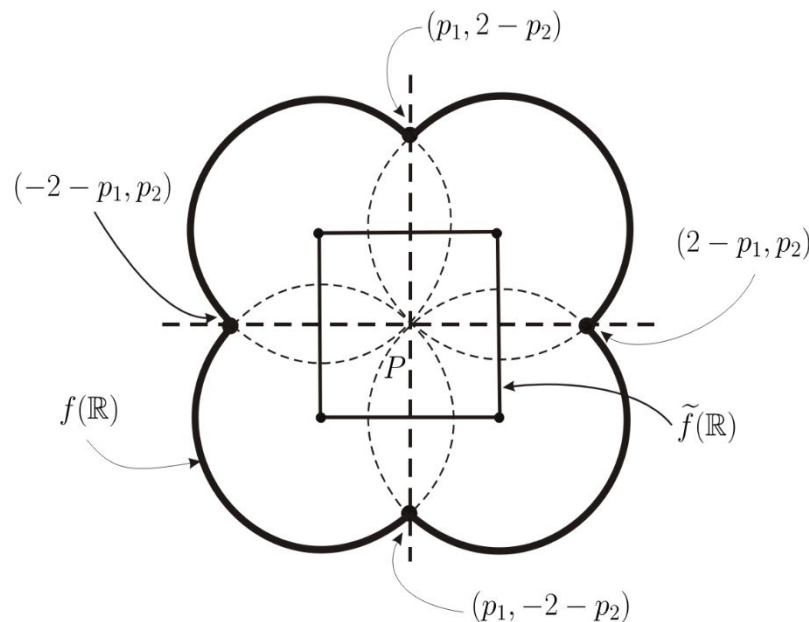
1. グラフが次の図のようになるように、周期 8 の C 級周期写像  $(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(n_1, n_2)$ :  $\mathbb{R}^2$  をまず構成する。





次に,  $C$  級の写像  $N: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  を  $N(t) = 1 / (n_1(t)^2 + n_2(t)^2)^{0.5} (n_1(t), n_2(t))$  で定義する. すると写像  $(x, y): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  の像は正方形であり, 写像  $(x, y): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  は写像  $N: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  をガウス写像とするフロントルであることがわかる. すなわち, 「正方形はフロントルの像である」ということを具体的に写像を構成することにより示した. フロントルにおいてはこれまで主に研究されてきたのはプロパーフロントルであったが, ここで構成されたフロントルはノンプロパーフロントルであり, 「正方形を像として実現するフロントルはすべてノンプロパーフロントルでなければならない」ということはすぐわかる. 「ノンプロパーフロントルはこれまでどちらかと言えば見捨てられていたようにも見受けられるが, 応用する観点から眺めるとノンプロパーフロントルは実は有用な対象である」と主張していることにもなることが, 意外性を持って受け止められている理由であろうと思える.

2. 【最も代表的な論文】である Stanislaw Janeczko and Takashi Nishimura, *Anti-orthotomics of frontals and its applications*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 487 (2020), 124019 においては, 「与えられたフロントルに対し, 与えられた点がノーシルエット条件を満たせば, その点に対するフロントルのオーソトミックはフロントルになり, 元のフロントルの写像から具体的に記述できる」こと, およびその逆である, 「与えられたフロントルに対し, 与えられた点がノーシルエット条件を満たせば, その点に対するフロントルのアンチ-オーソトミックはフロントルになり, 元のフロントルの写像から具体的に記述できる」ことが示してある. さらに, 「オーソトミックのガウス写像, アンチ-オーソトミックのガウス写像が具体的に構成でき, それらの間に密接な関係がある」ことも示してある.



上図においては, 正方形の中心点  $P$  に対する正方形のオーソトミックが太線で描かれている曲線となり, 上図では描かれていないものの, 太線で描かれている曲線の点  $P$  に対する 50% の縮小コピーが点  $P$  を垂足点とする垂足曲線になる. この垂足曲線が正方形というウルフ図形(ウルフ点は点  $P$ ) の convex integrand になっている. 太線で描かれているオーソトミック曲線を像として与える具体的な写像は, 1 で構成されている写像と上記の結果を使えば具体的に得ることができる. 従って, 正方形の convex integrand を像として与える写像も具体的に描くことができ, 実際に上図の太線はこのようにして得られた写像の像をグラフィックスソフトを用い

て描いている。

表面科学においては convex integrand は結晶の表面エネルギー密度関数の（極座標表示による）グラフを表していることになり，与えられた結晶から表面エネルギー密度関数を求めることは表面科学においては重要な問題である．この問題に対しては Herring の方法（C.~Herring, *Some theorems on the free energies of crystal surfaces*, Physical Review, **82** (1951), 87-93 で与えられた方法）が古典的によく知られた有名な解法である．ところが，Herring の方法は分子間力の考察が必要になるなど物性物理に強く依存しているのみならず，多くの仮定が必要になる．

【最も代表的な論文】である Stanislaw Janeczko and Takashi Nishimura, *Anti-orthotomics of frontals and its applications*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **487** (2020), 124019 において得られた，与えられたウルフ図形から convex integrand を具体的に描く方法は，「ウルフ点がノーシルエット条件を満たす」という仮定を満たしていれば常に使える，明瞭であり純粋に幾何学的方法であるので，表面科学において新しい知見を与えたことになる．

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計15件（うち査読付論文 12件 / うち国際共著 8件 / うちオープンアクセス 15件）

1. 著者名 Nishimura Takashi	4. 巻 13
2. 論文標題 Jacobian-squared function-germs	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Pure and Applied Mathematics Quarterly	6. 最初と最後の頁 711 ~ 728
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/PAMQ.2017.v13.n4.a5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Han Huhe, Nishimura Takashi	4. 巻 78
2. 論文標題 Spherical method for studying Wulff shapes and related topics	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 1 ~ 53
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/aspm/07810001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Han Huhe, Nishimura Takashi	4. 巻 245
2. 論文標題 The spherical dual transform is an isometry for spherical Wulff shapes	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Studia Mathematica	6. 最初と最後の頁 201 ~ 211
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4064/sm8406-9-2016	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 西村 尚史	4. 巻 2085
2. 論文標題 可微分 convex integrand とその dual の同時安定性について	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 RIMS kokyuroku	6. 最初と最後の頁 15-19
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Han Huhe, Nishimura Takashi	4. 巻 145
2. 論文標題 Strictly convex Wulff shapes and $C^1$ convex integrands	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 3997 ~ 4008
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) doi.org/10.1090/proc/13510	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 HAN Huhe, NISHIMURA Takashi	4. 巻 69
2. 論文標題 Self-dual Wulff shapes and spherical convex bodies of constant width /2	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 1475 ~ 1484
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) doi:10.2969/jmsj/06941475	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Boizan BATISTA Erica, HAN Huhe, NISHIMURA Takashi	4. 巻 71
2. 論文標題 STABILITY OF $C^1$ CONVEX INTEGRANDS	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Kyushu Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 187 ~ 196
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) doi.org/10.2206/kyushujm.71.187	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Ichiki Shunsuke, Nishimura Takashi	4. 巻 222
2. 論文標題 Preservation of Immersed or Injective Properties by Composing Generic Generalized Distance-Squared Mappings	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Springer Proceedings in Mathematics & Statistics	6. 最初と最後の頁 537 ~ 547
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) doi.org/10.1007/978-3-319-73639-6_18	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 MIZOTA Yusuke, NISHIMURA Takashi	4. 巻 47
2. 論文標題 Lowerable vector fields for a finitely L-determined multigerm	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Hokkaido Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 17 ~ 23
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) doi:10.14492/hokmj/1520928058	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Huhe Han and Takashi Nishimura	4. 巻 2049
2. 論文標題 Wulff shapes and their duals	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku	6. 最初と最後の頁 39-44
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Han Huhe, Nishimura Takashi	4. 巻 25
2. 論文標題 Limit of the Hausdorff distance for one-parameter families of Wulff shapes constructed by affine perturbations of dual Wulff shapes	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Methods and Applications of Analysis	6. 最初と最後の頁 277 ~ 290
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) doi:10.4310/MAA.2018.v25.n4.a1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Janeczko Stanislaw, Nishimura Takashi	4. 巻 487
2. 論文標題 Anti-orthotomics of frontals and their applications	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 124019 ~ 124019
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124019	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Nishimura Takashi	4. 巻 21
2. 論文標題 Kato's chaos created by quadratic mappings associated with spherical orthotomic curves	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Singularities	6. 最初と最後の頁 205-211
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) doi:10.5427/jsing.2020.211	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Erica Boizan Batista, Huhe Han and Takashi Nishimura	4. 巻 43
2. 論文標題 Simultaneous smoothness and simultaneous stability of a $C^\infty$ strictly convex integrand and its dual	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Kodai Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 221-242
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 西村尚史	4. 巻 2140
2. 論文標題 球面の射影を応用したウルフ図形の研究	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku	6. 最初と最後の頁 16 - 22
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 6件)

1. 発表者名 西村 尚史
2. 発表標題 Projections of $S^n$
3. 学会等名 研究会【微分幾何学・微分式系・特異点論の応用】
4. 発表年 2018年



1. 発表者名 Takashi Nishimura
2. 発表標題 2.Limit of the Hausdorff distance for one-parameter families of some Wulff shapes
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型)【可微分写像の特異点論を用いたトポロジー・微分幾何学の研究】(国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takashi Nishimura
2. 発表標題 Jacobian-squared function-germs
3. 学会等名 Special Session on Real and Complex Singularities Spring Central and Western Joint Sectional Meeting, American Mathematical Society (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takashi Nishimura
2. 発表標題 Self-dual Wulff shapes and spherical convex bodies of constant width /2
3. 学会等名 Banach Center Conference (Bedrewo, Poland) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takashi Nishimura
2. 発表標題 Simultaneous stability of $C^k$ convex integrands and their duals
3. 学会等名 RIMS研究集会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Erica Boizan Batista, Huhe Han and Takashi Nishimura
2. 発表標題 Stability of $C^\wedge$ convex integrands
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takashi Nishimura
2. 発表標題 Jacobian-squared function-germs
3. 学会等名 特別学術報告, 西北農林科技大学理学院(中国)(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takashi Nishimura
2. 発表標題 Anti-Orthotomics of Frontals
3. 学会等名 研究集会【特異点論による空間研究】, JR博多シティ会議室
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takashi Nishimura
2. 発表標題 Anti-Orthotomics of Frontals and their Applications
3. 学会等名 Singularity Theory Group Seminar, サンパウロ大学サンカルロス校数理学とコンピュータ研究所(ブラジル)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takashi Nishimura
2. 発表標題 Anti-Orthotomics of Frontals and their Applications
3. 学会等名 6th International Workshop on Singularities in Generic Geometry and its Applications, バレンシア大学(スペイン)(国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----