

令和 3 年 6 月 4 日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K05247

研究課題名(和文) 葉層構造と微分同相群が関与する指数定理

研究課題名(英文) The index theorem involved with foliation and diffeomorphism groups

研究代表者

森吉 仁志 (Moriyoshi, Hitoshi)

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：00239708

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：「指数定理を離散化する」という方針の下に、作用素を離散化あるいは有限次元近似したときに定義される Ginsparg-Wilson 指数が関与する指数定理を定式化した。さらに完備リーマン多様体から定まる Roe algebra と Callias 指数定理との関連性を明らかにした。加えて、葉層二次特性類の一つである Bott-Dirac 類と、等積中心アファイン平面曲線全体のなす空間のシンプレクティック構造との関係、特に円周の微分同相群が与えるシンプレクティック作用に対するモーメント写像の存在を証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

離散化された対象とは、現実の社会では最初に現れる研究客体である。そのような対象では具体的計算やPCを用いたシミュレーションなどによる細かい研究が可能であり、従って研究の応用範囲も広い。本研究では、現代数学の精華の一つと認められる指数定理を離散化することを目標とした。そして研究成果の一つとして、物理学の格子ゲージ理論で研究されている Ginsparg-Wilson 作用素に対する指数定理の定式化に成功した。

研究成果の概要(英文)：In order to discretize the index theorem, we first established the Ginsparg-Wilson index theorem, which appears when we deal with combinatorial or finite-dimensional operators. Second, we clarified the relation between the Callias index theorem and the Roe algebra for complete Riemannian manifolds. Third, we investigated the Bott-Dirac class and the space of equicentro-affine curves on the plane and proved the existence of a momentum map for the symplectic action of the diffeomorphism group of unit circle.

研究分野：位相幾何 非可換幾何

キーワード：指数定理 非可換幾何 葉層多様体 微分同相群 K理論 巡回コホモロジー

1. 研究開始当初の背景

多様体の幾何不変量(オイラー数・符号数・L 種数・A-hat 種数など)に関する深い定理のひとつに Atiyah-Singer 指数定理[Atiyah-Singer, Ann. of Math. 87(1968)]がある。指数定理とは多様体の解析不変量と幾何不変量を結びつける数学公式であり、性質が全く異なる二つの不変量を関連付けているという点でその有用性は著しく高い。例えば L 種数や A-hat 種数の整数性定理(種数本来の定義からは有理数であることしか判らない)や、正スカラー曲率を持つ閉スピン多様体の A-hat 種数が消滅するという事実などは、指数定理の帰結として得られる著しい結果である。一方 A. Connes は、1980 年代後半に非可換幾何学という新しい枠組を提起した[Publ. Math. IHES, 62 (1986)]。そこにはより一般の枠組による指数定理の拡張という動機があったと考えられる。そして非可換幾何学は、微分幾何学・位相幾何学・作用素環論・エルゴード理論・大域解析学にまたがる広い分野に多大な刺激を与えている[Connes, Noncommutative Geometry, Academic Press, 1994]。Connes は作用素環論・K 理論・巡回コホモロジー群などの新しい手法を非可換幾何学に導入して、葉層多様体・エルゴード的群作用を許す多様体・非コンパクト等質空間、有限幾何性をもつ完備リーマン多様体などに対して指数定理を拡張した。このような一般化は、従来の幾何手法では達成し得なかった成果である。さらに Baum, Higson, Moscovici, Roe 等はその手法を発展させて、位相幾何学における長年の懸案である Novikov 予想や Gromov-Lawson 予想に関して著しい進展を与えた。一方、Witten は弦理論において D-brane の位相的分類を行うために捩れ K 理論(Twisted K-theory)という概念を導入した。[D-branes and K-theory, JHEP 9812:019 (1998)]。K 理論は位相幾何のみならず非可換幾何学においても主要な研究手法のひとつであり、このことから弦理論と非可換幾何学の密接な関係が確認できる。その後 Carey, Freed, Mathai, Murray, Stevenson 等により、捩れ K 理論と Gerbe との関連性が明らかにされ、2000 年以降これらの研究を踏まえて、Marcolli-Mathai [Commun. Math. Phys. 217 (2001)] 等による指数定理の一般化(Twisted Index Theorem)が展開されている。非可換性に注目するという着想は Connes 独自のものではなく、遡れば 60 年代の変形量子化の研究などに端緒を見出すことができる。しかしこの方向への研究は多くが作用素環論に軸足をおき、幾何学の立場での具体的研究は数が少ない。例えば Connes, Skandalis 等を中心とするフランスの研究グループは、作用素環論の立場を堅持して非可換幾何学の一般的枠組を確立することに精力的であって、解析学の立場からの研究に主要な関心をもつように見える。また Witten を始めとする弦理論研究者が非可換幾何学の有用性に注目して多くの研究を行っているが、これらの研究と非可換幾何との深い関連性は未だ明瞭ではない。最近 Carey, Mathai, Murray, Stevenson, Wang 等のオーストラリアの研究グループが数学的基盤の上に Grebe および捩れ K 理論と非可換幾何学の関連性を探っているが、研究は途上にあるように見える。

2. 研究の目的

本課題では「非可換幾何学の枠組による指数定理の拡張」および「葉層多様体と微分同相群が関与する指数定理の展開」の 2 点を研究の主眼とした。より詳しく言うと：1) C^* 環の K 理論や巡回コホモロジーなど、非可換幾何学の枠組の下で展開された研究手法を用いて指数定理を拡張すること、すなわち「非可換化」を意識した指数定理の再構築を行うこと；2) 非可換化された指数定理を用いて、従来の幾何手法では扱い難対象、とくに葉層多様体の葉空間、微分同相群の離散的作用から定まる軌道空間、微分同相群の分類空間などの具体的研究に資すること；の 2 点である。そして研究期間内の具体的目標として以下の 3 つを置いた：1) 葉層多様体や微分同相群の離散作用が与えられると、ホロノミー亜群や変換亜群から葉層 C^* 環や接合積 C^* 環が自然に定義される。そして葉層多様体の葉に沿うホロノミー不変な楕円型微分作用素が与えられたとき(例えば葉上のディラック作用素など)、上記 C^* 環の K 群(K 理論)の元として作用素の指数が定義される。一方、環 A から定まる K 群 $K(A)$ と巡回コホモロジー群 $HC(A)$ の間には、自然なペアリングが存在する。このとき葉層二次特性類や微分同相群の特性類から或る巡回コサイクルを構成し、この巡回コサイクルと作用素指数のペアリング値を与える具体的な指数公式を導出する；2) 上記のペアリングを相対 K 群と相対コホモロジー群に対して一般化することで、境界付き多様体上の Atiyah-Patodi-Singer 指数定理を非可換幾何の枠組で定式化できる。そこで境界付き葉層多様体を考えて、葉に沿う微分作用素のスペクトル不変量(エータ不変量, Ray-Singer torsion 等)が関与する二次指数定理を導出する。3) 奇数次元の Atiyah-Singer 族指数定理(family index theorem)を扱おうと、Grebe や捩れ K 理論の特性類である Dixmier-Douady 類がその指数公式中に現れてくる。一方 Hitchin が定式化した Grebe のホロノミーを考えると、Dixmier-Douady 類に関連する二次特性類が定まる。こうして、葉層円周束のファイバーに沿う族指数定理の二次特性類と、葉層特性類である Godbillon-Vey 類との関連性が予期される。従って、まず葉層円周束における族指数定理の二次特性類と Godbillon-Vey 類(ある

いは Bott-Virasoro 類)との関係を解明し,さらに一般の場合について族指数定理の二次特性類と葉層特性類との関連を探る.

3. 研究の方法

本研究組織は研究代表者 1 名と連携研究者 4 名および海外研究協力者 2 名(P.Piazza, Università di Roma, la Sapienza; S. Hurder, University of Illinois at Chicago)の計 9 名で構成された.そして「指数定理の導出部」と「指数定理の展開部および具体例研究」に関わる 2 つのグループを構成し,各々の連携研究者・研究協力者が担当分野を中心に,以下のような段階を経て研究を推進した.

予備段階として本研究課題の周辺分野における基礎知識の充足を図る.そのため本研究目的に関連する研究集会へ積極的に参加し,また個別に専門家との密接な研究連絡を行う.

研究の本段階,すなわち「非可換幾何学の枠組による指数定理の拡張」と「葉層多様体と微分同相群が関与する指数定理の展開」においては,多くの専門家を交えた包括的研究連絡あるいは密度の高い研究集会の開催を行う.このような機会を経て研究成果の最終的完成をはかり,同時に応用面での妥当性を検証する.

本研究は,ほぼ以上の計画に基づいて実施された.まず初年度には本研究目的の周辺分野における基礎知識の充足を図った.そのため関連する主題の研究集会へ積極的に参加して専門家と討論を行った.加えて次年度以降は,多くの専門家との研究連絡を個別に行った.このために国内旅費・外国旅費・謝金等の経費を使用した.また非可換幾何学については,専門家を交えた密接な研究連絡やレビューを行った.また必要となる文献を整備し,指数的理の研究に資する環境を整備した.資料整理にはノートパソコンとその関連機器を拡張した.

4. 研究成果

本研究課題の 2 つの目的「非可換幾何学の枠組による指数定理の拡張」および「葉層多様体と微分同相群が関与する指数定理の展開」と,本研究進展に伴って生成した「指数定理を離散化する」という方針のもとに,導出部担当グループと展開部担当グループが定期的に研究討論を行って次の成果を得た:

- 1) Ginsparg-Wilson 指数が関与する指数定理とその応用例(夏目利一との共同研究);
- 2) 完備リーマン多様体から定まる Roe algebra と Callias 指数定理との関連性の明確化;
- 3) 等質中心アファイン平面曲線のなす空間の研究(黒瀬俊および藤岡敦との共同研究);
- 4) 多面体に対する Gauss-Bonnet 定理の一般化と Alexander-Spanier コホモロジーに関する研究.

これらをより詳しく述べると以下ようになる.

1) 作用素を離散化あるいは有限次元近似したときに定義される Ginsparg-Wilson 指数が関与する指数定理を定式化した.そして Fuzzy sphere 上の指数定理への適用が可能となり,2 次元球面のポアソン構造から誘導される巡回コサイクルを用いた指数公式を完成させた.さらにランダムウォークの一般化と考えられる量子ウォークに対する Ginsparg-Wilson 指数定理の適用例を見出した.整数全体を格子として各点に 2 次行列環を対応させたときに定まる量子ウォークにおいて,適切な設定の下に C^* 環を構成すると作用素に対する Ginsparg-Wilson 指数を考えることができる.このときフレドホルム指数が Ginsparg-Wilson 指数と一致することが確認した.

2) 完備リーマン多様体から定まる Roe algebra と Callias 指数定理との関連性を明らかにした.さらに有界コサイクルが関与するリーマン面上の指数定理に関しても一定の成果を得た.

3) 葉層二次特性類の一つである Godbillon-Vey 葉層特性類,あるいはそのファイバー積分である Bott-Virasoro 類に関連して発展した等質中心アファイン平面曲線のなす空間の研究において,この空間にシンプレクティック作用する単位円周の微分同相群の役割が明確となり,作用に対する運動量写像を明確に構成し,Bott-Virasoro 群との関連を明らかにすることが可能となった.

4) Gauss-Bonnet 定理の離散化を動機として発展した研究において,Alexander-Spanier コホモロジー理論を用いることが有効であることを発見し,その手法を応用して閉多様体の写像度集合の性質に関する成果を得た.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計0件

〔学会発表〕 計10件（うち招待講演 9件 / うち国際学会 5件）

1. 発表者名 H. Moriyoshi
2. 発表標題 Moment maps for the Bott-Virasoro group
3. 学会等名 Workshop on Non-commutative Geometry and Symplectic Geometry, (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 森吉仁志
2. 発表標題 等質中心アファイン平面曲線のなす空間と運動量写像--たかが1/2されど1/2--
3. 学会等名 福岡大学微分幾何研究集会2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 H. Moriyoshi
2. 発表標題 Geometry of the space of equi-centro-affine curves
3. 学会等名 International Workshop on Geometry of Foliated Spaces (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 森吉仁志
2. 発表標題 KdV 方程式と等積中心アファイン平面曲線のなす空間上の運動量写像
3. 学会等名 Koriyama Geometry and Physics Days 2020 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 森吉仁志
2. 発表標題 シュワルツ微分と等積中心アフィン平面曲線のなす空間への群作用
3. 学会等名 Koriyama Geometry and Physics Days 2020 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 H. Moriyoshi
2. 発表標題 Fuzzy sphere and the Ginsparg-Wilson index
3. 学会等名 Noncommutative Geometry and Representation Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 H. Moriyoshi
2. 発表標題 A new index theorem on Fuzzy sphere
3. 学会等名 Symmetries in Symplectic, Contact and Poisson Geometries (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 H. Moriyoshi
2. 発表標題 An index theorem on binary tube and the bounded Euler cocycle
3. 学会等名 AMS Spring Central and Western Joint Sectional Meeting (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 森吉仁志
2. 発表標題 多面体のガウス・ボンネ定理と離散的曲率
3. 学会等名 幾何学阿蘇研究集会（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 森吉仁志
2. 発表標題 Calabi 不変量と微分同相群の中心拡大
3. 学会等名 葉層構造の幾何学とその応用（招待講演）
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	前田 吉昭 (Maeda Yoshiaki) (40101076)	東北大学・知の創出センター・特任教授 (11301)	
連携研究者	小野 薫 (Ono Kaoru) (20204232)	京都大学・数理解析研究所・教授 (14301)	
連携研究者	高倉 樹 (Takakura Tatsuru) (30268974)	中央大学・理工学部・教授 (32641)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	宮崎 直哉 (Miyazaki Naoya) (50315826)	慶應義塾大学・経済学部・教授 (32612)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計4件

国際研究集会 The 5th China-Japan Geometry Conference,	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 Noncommutative Geometry and K-theory at Rits	開催年 2018年～2018年
国際研究集会 The 4th China-Japan Geometry Conference	開催年 2018年～2018年
国際研究集会 The 3th China-Japan Geometry Conference	開催年 2017年～2017年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------