

令和 5 年 4 月 20 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2022

課題番号：17K05248

研究課題名（和文）座標空間配置のホモトピー論

研究課題名（英文）Homotopy theory of coordinate subspace arrangements

研究代表者

岸本 大祐 (Daisuke, Kishimoto)

九州大学・数理学研究院・教授

研究者番号：60402765

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：抽象単体複体とは幾何学的な単体複体を抽象化し、その組み合わせ構造のみを抽出したものである。ポリヘドラルプロダクトは抽象単体複体の組み合わせ構造を設計図とし、与えられた空間ついから構成される空間である。ポリヘドラルプロダクトはトーリックトポロジーの中心的研究対象であるモーメントアングル複体や、座標空間配置とその補空間などの空間を実現する。ポリヘドラルプロダクトのトポロジーと設計図となる抽象単体複体の組み合わせ構造との関係を、ファットウェッジフィルトレーションの理論を構築することで明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ポリヘドラルプロダクトは数学の様々な分野に現れる重要な空間を実現する。したがって、そのトポロジーと元となる抽象単体複体の関係を明らかにすることは、多くの数学分野に強い影響を与える。また、ポリヘドラルプロダクトはトポロジーと組み合わせ論とを結ぶ架け橋であり、それを通してそれぞれの分野のアイデアやテクニックを互いに輸出し合うことにより、新しい研究の方向性を与える。実際、本研究で得られた抽象単体複体のGolod性とタイト性の関係に関する結果は組み合わせ論では想像すらされていなかったことである。

研究成果の概要（英文）：An abstract simplicial complex is an abstraction of a geometric simplicial complex, and it captures the combinatorial structure of a geometric simplicial complex. A polyhedral product is a space constructed from a pair of spaces in accordance with the combinatorial structure of an abstract simplicial complex. Polyhedral products include moment-angle complex which is a central object in toric topology, and coordinate subspace arrangements and their complements. I elucidated relations between the topology of a polyhedral product and the combinatorial structure of the underlying simplicial complex by developing the theory of the fat-wedge filtration.

研究分野：代数トポロジー

キーワード：ポリヘドラルプロダクト 代数トポロジー 組み合わせ構造

1. 研究開始当初の背景

座標空間配置は、それを与える $\{1, \dots, m\}$ の部分集合たちが生成する (抽象) 単体複体が定めるとしてよい。定義より、座標空間配置は、それを定める単体複体の組み合わせ構造を反映しており、その研究は、この組み合わせ構造とトポロジーとの相互作用のもと行われてきた。Davis-Januszkiewicz は、擬トーリック多様体の研究において、空間 $Z_K(\mathbb{C}P^2, *)$ (= 座標空間配置の和) と、モーメントアングル複体 と呼ばれる空間 $Z_K(D^2, S^1)$ (= 座標空間配置の補空間のホモトピー型) が基本的な役割を果たすことを発見した。これらの空間は、コホモロジーを通して座標空間配置の組み合わせ構造を非常によく反映する: $Z_K(\mathbb{C}P^2, *)$ のコホモロジーは K の Stanley-Reisner 環と同型であり、 $Z_K(D^2, S^1)$ のコホモロジーは K の Stanley-Reisner 環の Tor 代数と同型である。ここで、環の Tor 代数とは、その環のコホモロジーと深い関係がある重要な導来代数である。最近の座標空間配置の研究は、主に、この同型を通して Stanley-Reisner 環 (= 組み合わせ構造) とトポロジーの相互作用のもとで行われていた。

2. 研究の目的

直積空間の部分空間で、いくつかの成分が基点となっているものを座標部分空間と呼び、与えられた抽象単体複体にもとづいて、座標部分空間をいくつか集めて得られるものを座標空間配置という。座標空間配置の和や補空間のホモトピー型は、Stanley-Reisner 環などの組み合わせ的に構成される重要な代数と密接に関係しており、さらに、これら代数の性質を座標空間配置のホモトピー型を通して実現することができる。本研究では、座標空間配置の和と補空間のホモトピー型を、ファットウェッジフィルトレーションと呼ばれる自然なフィルトレーションを用いて、関連するホモトピー作用素と組み合わせ構造を融合することで調べる。

3. 研究の方法

座標空間配置の和と補空間のホモトピー型を、ファットウェッジフィルトレーション (FWF) を用いて、組み合わせ構造と対比させることにより研究する。(1) $Z_K(CX, X)$ の大域的性質: FWF の接着写像と高次 Hopf 不変量の関係を明らかにすることで、 $Z_K(CX, X)$ の LS カテゴリーを調べる。また、 $Z_K(CX, X)$ が与える、高次 Whitehead 積の一般化である写像と組み合わせ構造との関係を明らかにし、トーリックトポロジーへと応用する。(2) 群のコホモロジー: 特殊な座標空間配置の和と補空間は群のグラフ積の分類空間となる。群のグラフ積のコホモロジーを、FWF と下の(1)の結果を用いて、幾何的に研究する基礎を構築する。

(1) $Z_K(CX, X)$ の大域的性質

モーメントアングル複体 $Z_K(D^2, S^1)$ の FWF はコーン分解を与える。その接着写像の性質を明らかにし、LS カテゴリーに関連した $Z_K(D^2, S^1)$ の大域的な性質を明らかにする。さらに、その結果をより一般の $Z_K(CX, X)$ へと還元する。

(2) 群のコホモロジー

群 G の分類空間 BG と旗複体 K に対して、 $Z_K(BG, *)$ は K の 1 スケルトンに関する G のグラフ積 (right-angled Artin, Coxeter 群を含む) の分類空間であり、right-angled Coxeter 群の交換子群に対応する、群のグラフ積の部分群の分類空間は $Z_K(CG, G)$ で与えられる。本研究では、群のグラフ積のコホモロジーを、 $Z_K(BG, *)$ と $Z_K(CG, G)$ の FWF を用いて、(1) のホモトピー作用素に関する研究結果を交えることで幾何的に研究することを提案し、その基礎理論を構築する。

4. 研究成果

ファットウェッジフィルトレーションの理論を用いてポリヘドラルプロダクトの研究を行うことで以下の結果を得た。

(1) 抽象単体複体の Golod 性

抽象単体複体が Golod とは、その Stanley-Reisner 環の Koszul ホモロジーの Poincare 多項式がある種の等式をみたすことである。この等式は Koszul ホモロジーの積と高次のものを含むすべての Massey 積が自明であることと同値なことが知られている。Golod 性は 1960 年代から研究されているが、未だその組み合わせ的特徴づけは得られていない。近年、ポリヘドラルプロダクトの研究を通して Golod 性を、トポロジーを用いて扱うことが可能になり、新しい視点からの研究が行われている。本研究では 2 次元の場合に Golod 性の完全な組み合わせ的特徴づけを与えることに成功した。その後、曲面の三角形分割に関する結果をもとに、3 次元多様体の三角形分割の Golod 性に関する研究を行った。その結果、微分幾何学にルーツをもつ抽象単体複体のタイト性という概念（極小三角形分割と関係が深い）との関係を発見し、その同値性を証明した。この関係は組み合わせ論の視点だけでは発見できないものであり、また、証明もトポロジーを用いた新しいアイディアによるものである。

(2) Whitehead 積の Jacobi 恒等式

Whitehead 積は Jacobi 恒等式をみたすことがよく知られている。一方、Whitehead 積の高次作用素として高次 Whitehead 積が定義され、それらもある種の Jacobi 恒等式をみたすことが期待されているが、具体的に恒等式が書き下されたのは単純な場合ひとつだけである。一方、ポリヘドラルプロダクトは直積空間の部分空間であるため、(高次)Whitehead 積と深く関係すると期待されていた。本研究ではファットウェッジフィルトレーションを用いたポリヘドラルプロダクトの分解と(高次)Whitehead 積との関係を明らかにすることで、抽象単体複体の組み合わせ構造によって高次 Whitehead 積の Jacobi 恒等式を導き出すことに成功した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計27件（うち査読付論文 27件 / うち国際共著 6件 / うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 D. Kishimoto, N. Oda	4. 巻 23
2. 論文標題 Monoids of self-maps of topological spherical space forms	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Homology Homotopy Appl.	6. 最初と最後の頁 141-149
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/HHA.2021.v23.n2.a8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 D. Kishimoto, M. Takeda	4. 巻 386
2. 論文標題 Spaces of commuting elements in the classical groups	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Adv. Math.	6. 最初と最後の頁 107809
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2021.107809	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 K. Iriye, D. Kishimoto	4. 巻 23
2. 論文標題 Two-dimensional Golod complexes	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Homology Homotopy Appl.	6. 最初と最後の頁 215-226
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/HHA.2021.v23.n2.a12	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 D. Kishimoto, I. Membrillo-Solis, S. Theriault	4. 巻 7
2. 論文標題 The homotopy types of $SO(4)$ -gauge groups	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Eur. J. Math.	6. 最初と最後の頁 1245-1252
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40879-021-00453-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 D. Kishimoto, T. Matsushita	4. 巻 149
2. 論文標題 Relative phantom maps and rational homotopy	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Proc. Amer. Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 4029-4040
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/proc/15431	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 D. Kishimoto, A. Ohsita, M. Takeda	4. 巻 63
2. 論文標題 Note on Samelson products in exceptional Lie groups	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Glasg. Math. J.	6. 最初と最後の頁 741-752
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S0017089520000567	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 D. Kishimoto, A. Ohsita, and M. Takeda	4. 巻 24
2. 論文標題 Note on Samelson products in exceptional Lie groups	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Glasg. Math. J.	6. 最初と最後の頁 1-12
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S0017089520000567	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 D. Kishimoto and T. Miyauchi	4. 巻 150
2. 論文標題 Higher homotopy associativity in the Harris decomposition of Lie groups	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.	6. 最初と最後の頁 2982-3000
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/prm.2019.57[Opens in a new window]	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 D. Kishimoto and A. Yamaguchi	4. 巻 4
2. 論文標題 On the growth of topological complexity	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 J. Appl. Comput. Topol.	6. 最初と最後の頁 525-532
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s41468-020-00060-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 K. Iriye, D. Kishimoto, and R. Levi	4. 巻 32
2. 論文標題 Characterisation of polyhedral products with finite generalised Postnikov decomposition	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Forum Math.	6. 最初と最後の頁 1253-1269
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/forum-2020-0059	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 K. Iriye and D. Kishimoto	4. 巻 72
2. 論文標題 Whitehead products in moment-angle complexes	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 J. Math. Soc. Japan	6. 最初と最後の頁 1239-1257
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/82708270	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 M. Farber, D. Kishimoto, and D. Stanley	4. 巻 278
2. 論文標題 Generating functions and topological complexity	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Topology Appl.	6. 最初と最後の頁 107235
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2020.107235	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 D. Kishimoto	4. 巻 147
2. 論文標題 Right-angled Coxeter quandles and polyhedral products	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proc. Amer. Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 3715-3727
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/proc/14534	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 K. Iriye and D. Kishimoto	4. 巻 72
2. 論文標題 Whitehead products in moment-angle complexes	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 J. Math. Soc. Japan.	6. 最初と最後の頁 1239-1257
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 D. Kishimoto and T. Miyauchi	4. 巻 -
2. 論文標題 Higher homotopy associativity in the Harris decomposition of Lie groups	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 M. Farber, D. Kishimoto, and D. Stanley	4. 巻 -
2. 論文標題 Generating functions and topological complexity, accepted	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Topology Appl.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 K. Iriye and D. Kishimoto	4. 巻 59
2. 論文標題 Fat wedge filtrations and decomposition of polyhedral products	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Kyoto J. Math.	6. 最初と最後の頁 1-51
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1215/21562261-2017-0038	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 S. Hasui, D. Kishimoto, T.S. So, and S. Theriault	4. 巻 147
2. 論文標題 Odd primary homotopy types of the gauge groups of exceptional Lie groups	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proc. Amer. Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 1751-1762
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/proc/14333	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 K. Iriye, D. Kishimoto, and T. Matsushita	4. 巻 19
2. 論文標題 Relative phantom maps	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Algebr. Geom. Topol.	6. 最初と最後の頁 341-362
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/agt.2019.19.341	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 A. Kono and D. Kishimoto	4. 巻 19
2. 論文標題 On the homotopy types of $Sp(n)$ gauge groups	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Algebr. Geom. Topol.	6. 最初と最後の頁 491-502
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/agt.2019.19.491	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 S. Hasui, D. Kishimoto, and M. Tsutaya	4. 巻 21
2. 論文標題 Higher homotopy commutativity in localized Lie groups and gauge groups	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Homology, Homotopy Appl.	6. 最初と最後の頁 107-128
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/HHA.2019.v21.n1.a6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kouyemon Iriye, Daisuke Kishimoto	4. 巻 30
2. 論文標題 Golodness and polyhedral products for two dimensional simplicial complexes	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Forum Mathematics	6. 最初と最後の頁 527, 532
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/forum-2017-0130	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sho Hasui, Daisuke Kishimoto, Toshiyuki Miyauchi, Akihiro Ohsita	4. 巻 20
2. 論文標題 Samelson products in quasi-p-regular exceptional Lie groups	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Homology, Homotopy and Applications	6. 最初と最後の頁 185-208
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/HHA.2018.v20.n1.a11	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kouyemon Iriye, Daisuke Kishimoto	4. 巻 20
2. 論文標題 Polyhedral products for simplicial complexes with minimal Taylor resolutions	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Homology, Homotopy and Applications	6. 最初と最後の頁 69-78
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/HHA.2018.v20.n1.a5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Daisuke Kishimoto, Mitsunobu Tsutaya	4. 巻 60
2. 論文標題 SameIson products in p-regular $S0(2n)$ and its homotopy normality	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Glasgow Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 165-174
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S001708951600063X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Daisuke Kishimoto, Stephen Theriault, Mitsunobu Tsutaya	4. 巻 228
2. 論文標題 The homotopy types of $G2$ -gauge groups	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 92-107
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2017.05.012	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Sho Hasui, Daisuke Kishimoto	4. 巻 54
2. 論文標題 p-local stable cohomological rigidity of quasitoric manifolds	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 343-350
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計13件 (うち招待講演 13件 / うち国際学会 4件)

1. 発表者名 岸本大祐
2. 発表標題 Homotopy commutativity in localized gauge groups
3. 学会等名 ホモトピー沖縄 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 岸本大祐
2. 発表標題 Higher homotopy associativity in the Harris decomposition of Lie groups
3. 学会等名 Southampton-Kyoto Workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 岸本大祐
2. 発表標題 Higher homotopy associativity in the Harris decomposition of Lie groups
3. 学会等名 3rd PPICTA (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 岸本大祐
2. 発表標題 Higher Whitehead products in moment-angle complexes
3. 学会等名 Toric Topology 2019 in Okayama (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 岸本大祐
2. 発表標題 When is a polyhedral product a finite Postnikov section?
3. 学会等名 福岡ホモトピー論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 岸本大祐
2. 発表標題 When is a polyhedral product a finite Postnikov section?
3. 学会等名 Workshop on Polyhedral Products in Homotopy Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 岸本大祐
2. 発表標題 The Stanley-Reisner functor for a poset
3. 学会等名 離散幾何構造セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 岸本大祐
2. 発表標題 Right-angled Coxeter quandles and polyhedral products
3. 学会等名 ホモトピー論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 岸本大祐
2. 発表標題 Whitehead Products in moment-angle complexes
3. 学会等名 福岡ホモトピー論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 岸本大祐
2. 発表標題 The Borsuk-Ulam theorem
3. 学会等名 河北大学トポロジーセミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 岸本大祐
2. 発表標題 Mod p homology of the classifying space of a gauge group
3. 学会等名 中国科学院トポロジーセミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 岸本大祐
2. 発表標題 Relative phantom maps
3. 学会等名 Algebraic Topology, Combinatorics, and Mathematical Physics（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 岸本大祐
2. 発表標題 ポリヘドラルプロダクトのホモトピー論
3. 学会等名 日本数学会（招待講演）
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

岸本大祐のホームページ
<https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~kishi/>
岸本大祐のホームページ
<https://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~kishimoto/home.html>

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 Mapping Spaces in Algebraic Topology	開催年 2018年～2018年
国際研究集会 Young Researchers in Homotopy Theory and Toric Topology 2017	開催年 2017年～2017年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------