

令和 3 年 6 月 14 日現在

機関番号：14602

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K05249

研究課題名(和文)低次元トポロジーの発展と展開

研究課題名(英文)Development and Evolution of Low-dimensional Topology

研究代表者

小林 毅 (Kobayashi, Tsuyoshi)

奈良女子大学・自然科学系・教授

研究者番号：00186751

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：目的1)に関して「keenなHeegaard分解」が存在するための必要十分条件を与えた。目的2)に関して平面曲線全体から誘導される複体の研究を行った。この複体内の2点間の距離を評価する方法を与え、特に交点数が8以下の平面曲線の作る部分複体の構造を決定できた。また球面曲線の組に対して“安定交点数”と呼ばれる量を定義、自明な球面曲線とRI, RIII同値な球面曲線で自明なものに変形する過程でその交点数がもとのそれより必ず2上がるものが存在する事を示した。目的3)に関してトーラスの相似構造を利用して平坦折紙を生成する方法を提案した。またデータ解析に関して幾何学的な観点からの研究を行なった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

この研究によりHeegaard分解に関する新しい視点が導入された。その成果はもちろんのこと、研究にあたって、様々な具体例をつくるのに必要な技巧を提供でき、これからの大きな成果が期待できる。結び目・絡み目の橋表示という、古典的な研究対象にその基本的な部分で研究すべき領域が明らかになった。これからの研究を進める上での方向性を明らかにすることができた。低次元トポロジーに関してはパーシステントホモロジーの理論等実生活に結びついた応用が発見されている。本研究で低次元トポロジーの様々な成果を実用的に結び付けることを意識した研究ができた。特にその展開の可能性は大きいと考える。

研究成果の概要(英文)：For Purpose 1), we gave a necessary and sufficient condition for existing keen Heegaard splitting. For Purpose 2), we studied the structure of the complex obtained from the set of the spherical curves. We gave several results that give estimations of simplicial distances between vertices. Particularly we could give a complete description of the subcomplex consisting of the vertices arising from the spherical curves with at most eight double points. We defined a new invariant called “stable double point number” for a pair of spherical curves, and by making use of it we showed that there is a spherical curve that is transformed to a trivial spherical curve by a sequence of RI or RIII moves such that the number of the double points has to be raised by 2 during the process of the deformation. For Purpose 3), we proposed a method for producing flat foldable origamis. We studied about neural networks for targeting to originating new research field in topology.

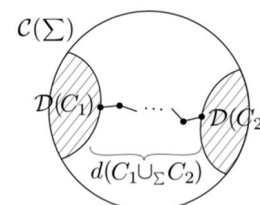
研究分野：幾何学

キーワード：Heegaard 分解 三次元多様体 結び目 絡み目 橋分解 折り紙 データ解析

1. 研究開始当初の背景

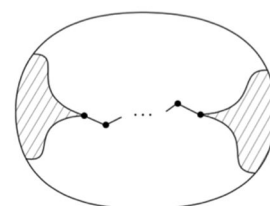
背景 1. Heegaard 分解は 3 次元多様体の最も基本的な表示法であり, Ozsváth-Szabo (Ann. of Math. 159 (2004)) による Heegaard Floer ホモロジーの定義に利用され, その結果一連の強力な成果が得られているなど, 非常に重要な概念である. Hempel (Topology 40(2001)) によって導入された Heegaard 分解の“距離”の概念は, その三次元多様体の多様な“複雑さ”を測る良い尺度になっていることが様々な研究者によって示されている. ところでこの“距離”は Heegaard 曲面の曲線複体の中で, その“Heegaard 分解の定める

二つの円板複体が定める部分空間の間の単体的な距離”として定式化される(右図). 曲線複体の距離空間として構造に関しては 1990 年代に Masur-Minsky によって研究され, その後クライン群論での懸案であったエンディングラミネーション予想の解決に用いられるなどその有用性が明らかになっている. Heegaard 分解の距離に関しては



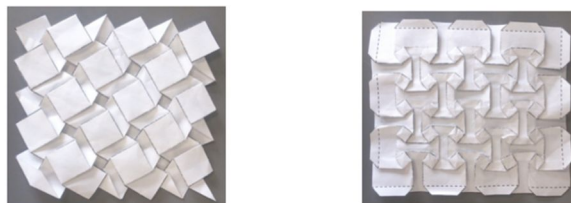
Ma-Qiu-Zou (Pacific J. Math. 275(2915)) と小林-張-井戸 (Alg. Geom. Top. 14(2014)) は

「任意の自然数 n に対してその距離がちょうど n となる Heegaard 分解が存在する」事を示した. ところでこれらの証明の基本には Masur-Minsky (Invent. Math. 138(1999)) によって示された「曲線複体は 双極的である」と言う事実の証明があるが, これに関して 2014 年に Birman-Menasco (Geometry Dedicata, Published online: 07 April, 2014) は曲線複体の中の長さ有限の測地線で「それを含むより長さの長い測地線は存在しない」という性質を持つものが数多く存在することを示した. これは, 双極性から導かれる典型的な事実(測地線はいくらでも延長できる)に反する性質である. つまり, 曲線複体は粗く見ると 双極性を持つのだが, 局所的に見ると双極性とは相反する性質も持つことが明らかになった. この論文に触発されて研究代表者の小林は, 張娟姪氏, 井戸絢子氏らと共同で Heegaard 分解の距離に関してより精密な取扱を提案した. 具体的には Heegaard 分解 $V \ W$ に対して, “その距離を実現する V の定める円板複体の点と, W の定める円板複体の点の対が一意的である(右図)”とき“ $V \ W$ は keen である”と定義しそのような Heegaard 分解が実際に存在するのかという問題を設定した.



背景 2. 3 次元球面内の結び目・絡み目の橋分解は古典的な研究対象であるが基本的な部分で未解決な問題も多い. これに関して張娟姪氏, 小沢誠氏, 高尾和人氏と共同で, Heegaard 理論における Casson-Gordon の手法を利用することにより, 無限個の相異なる橋数の既約な橋分解を許容するような結び目が存在することを示した (J. London Math. Soc. 93 (2016)). ところで同じ結び目・絡み目の二つの橋分解を与えられた時, それらの同値性を考えるに当たって“結び目・絡み目を setwise に固定するような isotopy で移り合う橋分解は同値とみなす”という定義と“橋分解を与える 2 次元球面を固定して結び目・絡み目はそれに横断的であるという条件を保ちながら isotopy で移り合うものは同値とみなす”という定義があり得るが, この二つの定義の間に差があるのかどうかについては(非常に基本的な疑問であるにもかかわらず)明確に意識されていなかったように思われる.

背景 3 .最近建築学を含むいくつかの研究領域で平坦折り紙の研究が進んでいる .人工衛星のソーラーパネルを折りたたむために考案された「ミウラ折り」はこのような平坦折り紙の例になっているが ,このミウラ折りの変形版と解釈できる (非常に美しい) 平坦折り紙が折り紙界の権威である R.Lang によって提出されている .ところでこの Lang の折り紙のパターンは Thurston の 3 次元多様体の幾何学に関する講義録で導入されている 2 次元トーラスの相似構造の展開写像の像に非常に似ている . 研究代表者の小林はこの直感に導かれて入井美紀や村井紘子と共同でこの定式化 (トーラスの相似構造) に基づく一般化されたミウラ折りの組織的な構成に取り組んでいる .



またデータ解析においてはデータを空間内の点と見なしてそれらを幾何的な手法を用いてクラスタリングする (: 有用なグループに分ける) と言うのは重要な問題であるが ,最近 Johnson は結び目・絡み目の thin presentation という表示の考え方をデータ解析に利用することにより ,データのクラスタリングに関する効率の良いアルゴリズムを提案している (Proc. of the SIAM Int. Conf. on Data Mining, 2013) .

2 . 研究の目的

上記の「 1 . 研究開始当初の背景」で述べた事実に導かれ本研究の代表者の小林は次のような研究の目的を設定した .

目的 1) 三次元多様体論 , 特に Heegaard 分解に関する研究に曲線複体の幾何学に関するあらたな視点を取り入れることにより , 手法の精密化・展開をはかり , この方面の研究に新たな展開・応用を発見する .

目的 2) 結び目・絡み目の橋分解に関する研究 , 特にその同値性に関する研究の精密化・展開を行う .

目的 3) 低次元トポロジーにおいてこれまでに得られている様々な手法や成果を折り紙やデータ解析等具体的な対象物に適用し , 低次元トポロジーが様々な分野に応用可能であることを示す .

3 . 研究の方法

研究の目的 1) に関しては , これまでの研究で Heegaard 分解が定める円板複体の位置に関して単に距離を図るだけでなくその位置の特性を考える事は意味があることを明らかにする必要がある . これに関しては , 曲線複体には , これまでの “ 粗い幾何学 (: coarse geometry) ” に対して “ 細かい幾何学 (fine geometry) ” という問題意識を持つことによって新しい展開が期待できる , ことが明らかになってきた , という認識に基づいて , 研究を推し進めていき Heegaard 分解やそれに関連して結び目・絡み目の橋分解に応用などに研究を展開することとした .

研究の目的 2) で述べたように結び目・絡み目の二つの同値性に差があることが明らかになったが , これを出発点として研究の展開を図ることを目指す .

研究の目的 3) に関しては , まず折り紙については上記の「 トーラス上の相似構造」の他に , 「分

岐曲面上の相似構造」など低次元トポロジーにおける様々な概念を用いて表示できるものがあると思われるので数学的な定式化を行った上で、応用まで見据えた新しい折り紙の発見につなげてゆきたい。また位相的データ解析に関しては、位相幾何学の手法を実際にデータ解析に適用することから始めて新たな展開を目指す。

4. 研究成果

研究目的 1), 2) に関しては以前の張娟姫, 井戸絢子との共著論文の中で定義した「keen な Heegaard 分解」が実際に存在するための必要条件を明らかにし更にこの条件を満たすならば実際にそのような keen Heegaard 分解が存在することを示した(Adv. Stud. Pure Math., 78(2018), 293-311)。また keen Heegaard 分解対応する概念を結び目・絡み目の一般化された橋分解に対しても定義し, Heegaard 分解の場合と同様にそのような分解が存在するための必要十分条件を明らかにすることができたと考えているが現在も研究は継続中である。またこれらの研究に関連して広島大学の井口大幹・古宇田悠哉氏は“weakly keen”と呼ばれる概念を導入しそのような Heegaard 分解を持つ三次元多様体の写像類群について調べたがこの研究の中で彼らは weakly keen であって strongly keen で無いような Heegaard 分解が実際に存在するのか, という問題を提出している。張娟姫, 井戸絢子と共同でこの問題に対する研究を行い weakly keen であって strongly keen で無いよう Heegaard 分解を構成する方法を提案し現在も研究は継続中である。

研究目的 2) に関しては張娟姫, 小沢誠, 高尾和人と共同で結び目・絡み目の橋位置と橋分解についてこれまで明確に区別されていなかった 2 つの同値性に関してそれらの違いを明確にする定式化についての研究を行っており現在も研究は継続中である。また伊藤昇 橋爪恵 船越紫, 村井紘子と共同で平面曲線全体の集合から(RI-move によって生成される同値関係による同値類を RIII-move によって移り合うものを辺で結ぶことによって)誘導される複体に関する研究を行った。この複体内の 2 点間の距離を評価する方法をいくつか与えたが, 特に交点の数が 8 以下の平面曲線が作る部分複体の構造に関してその構造を完全に決定することができた(Jour. Knot Theory and its Ramifications, 27(2018))。また小林住香との共同研究で球面曲線の組に対して“安定交点数”と呼ばれる量を定義し, 自明な球面曲線と RI, RIII 同値な球面曲線で自明なものに変形する過程でその交点数がもとのそれより必ず 2 上がるものが存在することを示した(JP Journal of Geometry and Topology, 22(2019), 129-163)。

研究目的 3) に関しては, 入井美紀, 村井紘子と共同で 2 次元トーラスの相似構造を利用して平坦折り紙を生成する方法を提案した(JP Jour. of Geometry and Topology, 22(2019), 45-63)。また奈良女子大学の大学院生であった法橋厚美によって考案された新しい折り紙の構成法について研究集会や講演会での講演を行い, この折り紙に 潜む数学的構造に関する問題提起を行った。またニューラルネットワークに関するこれまでの成果について情報を収集し大学院生とディープニューラルネットワークに関して幾何学的な観点からの研究をおこなった。一例として“与えられた結び目が自明であるかどうかを判定する”という結び目の自明性判定問題にニューラルネットワークを使うというアプローチに関する研究を行った。特にニューラルネットワークの学習に必要な教師データの作成に関する研究を大学院生の江田茜と共同で行った。ここで得られた結果については江田の修士論文としてまとめた。また大学院生の鈴木ひかると, Nickle と Kiela によって提案されたポアンカレ円板へのネットワーク埋め込みに関する手法を自然言語処理に応用する研究を行い, 対話の構造を可視化・応用する方法に関する提案を行なった。この結果については鈴木ひかるとの修士論文としてまとめた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Sumika Kobayashi, Tsuyoshi Kobayashi	4. 巻 22
2. 論文標題 Stable Double Point Numbers of Pairs of Spherical Curves	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 JP Journal of Geometry and Topology	6. 最初と最後の頁 129-163
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.17654/GT022020129	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Ayako Ido, Yeonhee Jang, Tsuyoshi Kobayashi	4. 巻 78
2. 論文標題 On keen Heegaard splittings	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Adv. Stud. Pure Math.	6. 最初と最後の頁 293-311
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/aspm/07810293	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Yukari Funakoshi, Megumi Hashizume, Noboru Ito, Tsuyoshi Kobayashi, and Hiroko Murai	4. 巻 27
2. 論文標題 A distance on the equivalence classes of spherical curves generated by deformations of type RI	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Jour. Knot Theory and its Ramifications	6. 最初と最後の頁 1850066-1850066
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0218216518500669	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Miki Irii, Tsuyoshi Kobayashi, and Hiroko Murai	4. 巻 22
2. 論文標題 Similarity structure on 2-dimensional torus and flat origami	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 JP Jour. of Geometry and Topology	6. 最初と最後の頁 45-63
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.17654/GT022010045	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tsuyoshi Kobayashi, and Yo' av Rieck	4. 巻 296
2. 論文標題 The growth rate of the tunnel number of m-small knots	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Pacific Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 57, 101
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/pjm.2018.295.57	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 該当する

[学会発表] 計4件(うち招待講演 2件/うち国際学会 0件)

1. 発表者名 小林毅
2. 発表標題 サビエンス全史的視点から見たSociety 5.0の意義とポアンカレ埋め込みを用いた会話分析の紹介
3. 学会等名 奈良女子大学人間文化研究科複合現象科学専攻数学・物理学・情報科学の研究交流シンポジウム(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 小林毅
2. 発表標題 折り紙に現れる幾つかの幾何構造について
3. 学会等名 奈良女子大学トポロジーセミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 小林毅
2. 発表標題 折り紙に現れる幾つかの数学構造について
3. 学会等名 トポロジーとコンピュータ(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 船越紫
2. 発表標題 Complexes induced from spherical curves and distances
3. 学会等名 結び目と数学X
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

小林毅 http://www.nara-wu.ac.jp/math/personal/tsuyoshi/index-j.htm NWUトポロジーグループ https://www.facebook.com/NWUTopologyGroup/

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------