

令和 6 年 6 月 11 日現在

機関番号：15201

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2023

課題番号：17K05251

研究課題名（和文）特殊な連続写像に関する近似定理とそのトポロジー，グラフ理論及び応用数学への適用

研究課題名（英文）The Approximation Theorem on Special Continuous Mappings and its Application to Topology, Graph Theory, and Applied Mathematics.

研究代表者

松橋 英市 (Matsubishi, Eiichi)

島根大学・学術研究院理工学系・准教授

研究者番号：60558518

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,800,000円

研究成果の概要（和文）：Graph-like連続体を値域とするweakly Whitney preserving mapがEulerian pathの一般化であるarc-wise increasing mapと等価になることを証明した。さらに閉区間から n 次元立方体への全射連続写像（空間充填曲線）のうち位相的な意味でほとんどすべての連続写像はweakly Whitney preserving mapであることを示した。またChogoshvili-Pontrjaginの主張への良く知られた反例を強化した。さらに集合値関数を結合写像にもつ射影極限について研究を行い射影極限が分解不可能になるための十分条件を導出した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

連続体間の特殊な連続写像であるweakly Whitney preserving mapがgraph-like連続体におけるEulerian pathと等価であることを証明したことは、トポロジーとグラフ理論の境界領域の開拓への寄与であるといえる。また、昨今の射影極限の理論において、上半連続な集合値関数を結合関数とする射影極限が分解不可能になるための十分条件は、そのほとんどの場合が因子空間が閉区間の場合において与えられているが、本研究では因子空間を一般の連続体としており、本分野において大きな前進となっている。

研究成果の概要（英文）：We proved the equivalence between weakly Whitney preserving maps, which map continua to graph-like continua, and arc-wise increasing maps, serving as a generalization of Eulerian paths. Additionally, We demonstrated that among surjective continuous mappings from closed intervals to n -dimensional cubes (space-filling curves), almost all such mappings are weakly Whitney preserving maps in a topological sense. Moreover, We strengthened a well-known counterexample to the Chogoshvili-Pontrjagin claim. Furthermore, We conducted research on inverse limits with upper semi-continuous set-valued functions, deriving sufficient conditions for inverse limits to become indecomposable continua.

研究分野：トポロジー

キーワード：Whitney preserving map graph-like continuum inverse limit decomposable continuum indecomposable continuum

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

トポロジーにおける特殊な連続写像による近似定理に関する研究は 1990 年代に数多く行われた。例えば逆像の連結成分すべてが遺伝的に分解不可能になる連続写像 (Bing map) をはじめとして、Lelek map, Krasinkiewicz map などによる近似定理についての研究が先行結果として挙げられる。Bing map については 1996 年 Levin が任意のコンパクト距離空間上の連続関数は位相的な意味でそのほとんど全てが Bing map になることを示した。Lelek map についても 1998 年 Levin が任意の n 次元コンパクト距離空間上の連続関数は位相的な意味でそのほとんど全てが $(n-1)$ 次元 Lelek map になることを示した。Krasinkiewicz map に関しては 1996 年 Krasinkiewicz が任意のコンパクト距離空間から 1 次元多様体への連続写像は Krasinkiewicz map で近似できることを示し、2003 年 Levin と Lewis が任意のコンパクト距離空間上の連続関数は位相的な意味でそのほとんど全てが Krasinkiewicz map になることを主張したが、彼らの証明の G 性に関する議論には間違いがあった。申請者は 2006 年の論文で Levin と Lewis の当初の主張を大きく超える「任意のコンパクト距離空間から多面体への連続写像のうち、位相的な意味でそのほとんど全てが Krasinkiewicz map になる」ことを示した。

また、グラフが一筆書きできる必要十分条件は良く知られているが、申請者は像空間を局所連結連続体のときに研究をしており、2015 年の論文で一筆書きの一般化である arcwise increasing map に関して「閉区間から free arc を含まない局所連結連続体への連続写像は位相的な意味でそのほとんど全てが arcwise increasing map になる」ことを示し、さらに同論文で dendrite が一筆書きできる必要十分条件を与えていた。

2. 研究の目的

特殊な連続写像を用い、新旧問わず様々な問題の解決、関連分野への応用を目的とする。例えば 2 次元連続体の Hyperspace が無限次元になるかどうかは 50 年以上の未解決問題であったが、1996 年、Levin と Sternfeld が同問題を肯定的に解決している。これ以外にも上記連続写像が未解決問題の鍵となっていたケースは多々あり、また、申請者は Krasinkiewicz map に関して 1. で述べたような結果を示していたので、上述の連続写像の性質全てを合わせた連続写像を用いて良い結果を探る。また、グラフ理論と連続体理論の親和性、応用数学への応用 (とくに空間充填曲線に関して) などに関し特殊な連続写像を用いて新たな結果を導出する。

3. 研究の方法

- (1) Peano 連続体が一筆書きを許容するための必要十分条件を調べる。
- (2) の応用として Peano 連続体に関する Hamilton path について考察し、また、反復的ではない空間充填曲線の例でよいものを見つける。
- (3) 複雑な連続写像に関する近似定理が成立するための値域の条件を調べ、その応用として次元論の未解決問題の攻略を狙う。
- (4) 研究集会の開催、および様々な分野の研究集会への参加を通して自身の研究成果を発信するとともに、国内外の研究者と交流し、情報交換を行う。

4. 研究成果

(1) Weakly Whitney preserving map に関する研究を行い、閉区間からグラフィック連続体への arcwise increasing map と weakly Whitney preserving map は等価となることを示した。また、 n 次元立方体 (またはヒルベルト立方体) への空間充填曲線は位相的な意味でそのほとんどが weakly Whitney preserving であることを示した。さらに定義域を D -連続体、値域を superdendrite とするような Hereditarily irreducible map で continuum-wise injective map でないものの例を与えた。

(2) 特殊な連続写像に関する近似定理の応用として、Chogoshvili-Pontrjagin Claim に関する先行結果の改良を行った。この主張は 1993 年 Sternfeld によって誤りだと示されたが、その後驚くべきことに Levin-Sternfeld は 1998 年全ての 3 次元以上のコンパクト集合が上述の主張の反例になることを示した。しかし、Levin-Sternfeld はかなり高い次元のユークリッド空間で彼らの定理を証明している。本研究では Levin-Sternfeld の結果を改良し、低い次元のユークリッド空間の中で Chogoshvili-Pontrjagin Claim を否定することに成功した。

(3) 上半連続な集合値関数を結合関数にもつ射影極限が分解不可能連続体になるための十分条件を得た。

(4) Janiszewski 連続体で、部分連続体がすべて D -連続体になるが、 D^* -連続体も Wilder 連

続体も含まないものがあることを示した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 4件 / うち国際共著 2件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Matsuhashi Eiichi, Oshima Yoshiyuki, Tomie Masaya	4. 巻 311
2. 論文標題 The Chogoshvili-Pontrjagin Claim and dendrites	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 107961 ~ 107961
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2021.107961	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 松橋英市、山中崇央	4. 巻 2209
2. 論文標題 Full projection propertyについて	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 80--91
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Espinoza Benjamin, Matsuhashi Eiichi	4. 巻 285
2. 論文標題 D-continua, D*-continua, and Wilder continua	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 25p.
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2020.107393	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Matsuhashi Eiichi, Yamanaka Takahiro	4. 巻 17
2. 論文標題 Inverse Limits with Upper Semi-continuous Bonding Functions Whose Inverse Functions are Continuous	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mediterranean Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 19p.
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00009-020-01525-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Espinoza Benjamin、Matsuhashi Eiichi	4. 巻 262
2. 論文標題 Weakly Whitney preserving maps	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 90 ~ 108
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2019.05.010	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計6件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 松橋英市、山中崇央
2. 発表標題 Full Projection Property について
3. 学会等名 一般位相幾何学の動向と諸分野との連携
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 松橋英市、Benjamin Espinoza
2. 発表標題 D-continua, D*-continua and Wilder continua
3. 学会等名 ジェネラルトポロジーシンポジウム
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Eiichi Matsuhashi
2. 発表標題 D-continua and related topics
3. 学会等名 Pitt Topology Seminar
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 大島慶之*, 松橋英市, 富江雅也 (*が発表者を表す)
2. 発表標題 Chogoshvili-Pontrjagin の主張について
3. 学会等名 一般位相幾何学とその関連分野の進展
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Benjamin Espinoza and Eiichi Matsuhashi
2. 発表標題 D-continua and related topics
3. 学会等名 ジェネラルトポロジーシンポジウム
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松橋英市、山中崇央
2. 発表標題 Inverse limits with upper semi-continuous bonding functions whose inverse functions are continuous
3. 学会等名 ジェネラルトポロジーシンポジウム
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>コロナ禍の影響により、研究期間が3年延長された。</p>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
米国	ピッツバーグ大学グリーンズ バーグ校		