

令和 3 年 5 月 6 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K05254

研究課題名(和文) 3次元多様体のシャドウ複雑度と幾何構造に関する研究

研究課題名(英文) Research on shadow complexities and geometric structures of 3-manifolds

研究代表者

古宇田 悠哉 (Koda, Yuya)

広島大学・先進理工系科学研究科(理)・教授

研究者番号：20525167

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：3次元多様体のシャドウとは、その多様体を境界に持つ4次元多様体の2骨格のことである。本研究では、シャドウの頂点数を介して定義される複雑度に着目し、3・4次元多様体のトポロジーと幾何構造に関して次の成果を得ることができた：(1) シャドウ複雑度が1の閉4次元多様体の分類；(2) 低複雑度の非輪状な4次元多様体の分類；(3) 余次元2の特異ファイバーを1本のみ持つ安定写像を許容する双曲絡み目の分類。また、関連する話題として、3次元多様体のHeegaard分解のGoeritz群に関する様々な性質の研究を進め、成果を発表した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

空間の数学的モデルである多様体の中でも、特に低次元(次元が4以下)のものについては、微分構造と組み合わせ構造が等価であることが知られている。したがって、これらの間のつながりを明示的に記述し、微分構造に基づいて定義される諸概念から、計算可能な組み合わせ的量を引き出すことが原理的に可能である。本研究課題では、シャドウ複雑度という組み合わせ量を用いて3次元多様体の微分構造・幾何構造、4次元多様体の微分構造を記述したものであり、得られた成果は低次元多様体への理解に寄与するものである。

研究成果の概要(英文)：A shadow of a 3-manifold is a 2-skeleton of a 4-manifold bounded by the 3-manifold. In this research project, we focused on the complexity defined by counting the number of vertices of shadows, and we have obtained the following results on the topology and geometry of 3 and 4-manifolds: (1) Classification of closed 4-manifolds of shadow complexity 1; (2) Classification of acyclic 4-manifolds with sphere boundary of shadow complexity at most 2; (3) Classification of hyperbolic links in the 3-sphere admitting a stable map with a single codimension-2 singular fiber. Further, as a related topic, we have obtained various interesting properties the Goeritz groups of Heegaard splittings of 3-manifolds.

研究分野：位相幾何学

キーワード：3次元多様体 4次元多様体 シャドウ 双曲体積 Goeritz 群

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

任意の 3・4 次元多様体はシャドウとよばれる 2 次元多面体により組み合わせ的に表示することができる。3・4 次元多様体が許容するシャドウの最小頂点数をその多様体のシャドウ複雑度とよぶ。シャドウは 3 次元多様体の幾何構造と深く関係し、4 次元多様体の可微分構造をこれまでとは異なる視点から記述する手法であることが先行研究により明らかにされていたが、一方で複雑度が低い多様体の分類が十分になされておらず、複雑度が多様体のどのような性質を反映しているのか不明な点が多く残されていた。

2. 研究の目的

本研究では、シャドウ複雑度に着目し、複雑度の低い 3・4 次元多様体の分類を行うことを目標とした。特に、3 次元球面内の絡み目に対して、安定写像を通して定義される複雑度 (余次元 2 の特異ファイバーの数)、双曲体積と、シャドウ複雑度の間の関係を明らかにすることを中心課題にあげた。また、シャドウと 3 次元多様体の双曲構造の関係にもとづき、低複雑度の 4 次元多様体の分類を目指した。

3. 研究の方法

シャドウは 2 次元単純多面体であるので、頂点数を固定するごとに特異点の周りの組み合わせ構造を全て列挙することができる。これらにはカスプ付きの 3 次元双曲多様体に対応する。シャドウの組み合わせ的分類と、双曲多様体への Dehn 充填の振る舞いの考察に基づき上記分類を実行した。3 次元球面内の絡み目に対しては、Stein 分解とシャドウの関連に着目して分類を実行した。

4. 研究成果

低シャドウ複雑度を持つ多様体の分類に関して、下記の成果を得た。

- (1) Bruno Martelli 氏と直江央寛氏と共同で、シャドウ複雑度 1 の閉 4 次元多様体の分類を行った。この分類により、特に、シャドウ複雑度が 1 以下の閉 4 次元多様体の符号数はすべて 0 であり、非球面的な閉 4 次元多様体の複雑度は 2 以上であることを示した。ここでは、特に双曲絡み目の例外的 Dehn 手術に関する考察が鍵になった。
- (2) 直江央寛氏と共同で、シャドウ複雑度が 2 以下で、境界が 3 次元球面である非輪状な 4 次元多様体は 4 次元球体と微分同相であることを示した。ここでは、Dehn 手術に関する重要な先行研究である Property R が鍵になった。
- (3) 古谷凌雅氏と共同で、余次元 2 の特異ファイバーを 1 本のみ持つ安定写像を許容する 3 次元球面内の双曲絡み目を分類した。ここでは、安定写像の Stein を変形してシャドウと見做すことが鍵になった。この成果は、佐伯、石川-古宇田による先行研究に立脚するものである。また、Stein 分解の頂点の周りの対称性に着目し、対合での商を観察することで、分類に現れる双曲絡み目の補空間の理想双曲四面体による分割を記述し、これらの双曲体積の最良な評価を与えた。

特に、上記成果 (3) は本研究課題で掲げた目標を遂行し、完全な形で解決したものである。これらの他、関連研究として、特に 3 次元多様体の Heegaard 分解の Goeritz 群に関するものを中心に次の成果を得た。

- (4) Sangbum Cho 氏と共同で、種数が 2 の Heegaard 分解の Haken 球面の構造 (球面複体の構造) を決定した。
- (5) Sangbum Cho 氏と共同で種数が 2 で可約な全ての Heegaard 分解の Goeritz 群の有限表示を決定した。
- (6) Sangbum Cho 氏, Arim Seo 氏と共同で、トラス上の 2 点配置に付随するブレイド群と $(1,1)$ 結び目に関する性質を記述した。

- (7) Sangbum Cho 氏と共同で、円盤複体の構造に着目することで、2 橋結び目の $(1,1)$ 分解は安定化により得られるという小林-佐伯の定理の別証明を与えた。
- (8) 石原海氏，小沢誠氏，下川航也氏と共同で、3 次元多様体の近傍同値な多重分岐曲面を組み合わせたに関連させる変形を記述した。
- (9) Sangbum Cho 氏，Jung Hoon Lee 氏と共同で、3 次元球面の種数が 3 以上の Heegaard 分解の原始円盤複体の構造に関する性質を記述した。
- (10) 船吉健太氏と共同で、ある埋め込みにより 3 次元球面の自己同相写像に拡張可能な種数 2 の閉曲面の自己同相写像は、Heegaard 曲面として埋め込むことで拡張可能であることを示した。
- (11) 井口大幹氏と共同で、twist book 分解により誘導される Heegaard 分解の Goeritz 群の諸性質を記述した。
- (12) 井口大幹氏，廣瀬進氏，金英子氏と共同で、絡み目の橋分解の Goeritz 群を定義し、幾何群論・力学系的諸性質を記述した。

上述の成果はいずれも論文にまとめ、査読付き国際誌から掲載予定、あるいは掲載済みである。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計12件（うち査読付論文 12件 / うち国際共著 7件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Susumu Hirose, Daiki Iguchi, Eiko Kin, Yuya Koda,	4. 巻 -
2. 論文標題 Goeritz groups of bridge decompositions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnab001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Sangbum Cho, Yuya Koda, Arim Seo	4. 巻 -
2. 論文標題 Braid group and leveling of a knot,	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Topology and Analysis	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S1793525321500114	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Yuya Koda, Bruno Martelli, Hironobu Naoe	4. 巻 -
2. 論文標題 Four-manifolds with shadow-complexity one	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Yuya Koda, Hironobu Naoe	4. 巻 20
2. 論文標題 Shadows of acyclic 4-manifolds with sphere boundary	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Algebraic & Geometric Topology	6. 最初と最後の頁 3707-3731
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/agt.2020.20.3707	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sangbum Cho, Yuya Koda, Jung Hoon Lee	4. 巻 272
2. 論文標題 Disk surgery and the primitive disk complexes of the 3-sphere	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 107092
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2020.107092	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Daiki Iguchi, Yuya Koda	4. 巻 272
2. 論文標題 Twisted book decompositions and the Goeritz groups	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 107064
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2020.107064	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sangbum Cho, Yuya Koda, Jung Hoon Lee	4. 巻 272
2. 論文標題 Disk surgery and the primitive disk complexes of the 3-sphere	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 107092
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2020.107092	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kenta Funayoshi, Yuya Koda	4. 巻 71
2. 論文標題 Extending automorphisms of the genus-2 surface over the 3-sphere	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 The Quarterly Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 175-196
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/qmathj/haz042	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kai Ishihara, Yuya Koda, Makoto Ozawa, Koya Shimokawa	4. 巻 257
2. 論文標題 Neighborhood equivalence for multibranch surfaces in 3-manifolds	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 11-21
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2019.02.005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sangbum Cho, Yuya Koda	4. 巻 371
2. 論文標題 The mapping class groups of reducible Heegaard splittings of genus two	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 2473-2502
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/tran/7375	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Sangbum Cho, Yuya Koda	4. 巻 27
2. 論文標題 The disk complex and 2-bridge knots	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Knot Theory and its Ramifications	6. 最初と最後の頁 12pp
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S021821651850027X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Sangbum Cho, Yuya Koda	4. 巻 165
2. 論文標題 Haken spheres for genus two Heegaard splittings	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society	6. 最初と最後の頁 563-572
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S0305004117000718	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計15件（うち招待講演 15件 / うち国際学会 4件）

1. 発表者名 古宇田 悠哉
2. 発表標題 `Monodromy groups" of Heegaard surfaces of 3-manifolds
3. 学会等名 埼玉大学 談話会 (Zoom) (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 古宇田 悠哉
2. 発表標題 Turaev のシャドウとその複雑度
3. 学会等名 N-KOOKセミナー (Zoom) (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 古宇田 悠哉
2. 発表標題 Goeritz groups of bridge decompositions
3. 学会等名 トポロジー火曜セミナー, 東京大学 (Zoom) (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 古宇田 悠哉
2. 発表標題 Positive flow-spines and contact 3-manifolds
3. 学会等名 広島大学 トポロジー・幾何セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yuya Koda
2. 発表標題 Positive flow-spines and contact 3-manifolds
3. 学会等名 Intelligence of Low-dimensional Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 古宇田 悠哉
2. 発表標題 閉 4 次元多様体のシャドウ複雑度
3. 学会等名 広島大学 トポロジー・幾何セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 古宇田 悠哉
2. 発表標題 Shadow complexity of 3- and 4-manifolds
3. 学会等名 第65回 トポロジーシンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 古宇田 悠哉
2. 発表標題 閉 4 次元多様体のシャドウ複雑度
3. 学会等名 研究集会「Graphと3次元多様体の研究」 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 古宇田 悠哉
2. 発表標題 欠陥のトポロジー
3. 学会等名 キラリティー, トポロジー, 結び目論第2回研究会(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yuya Koda
2. 発表標題 Positive flow-spines and contact 3-manifolds
3. 学会等名 Workshop "New development of low-dimensional topology" (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 古宇田 悠哉
2. 発表標題 Positive flow-spines and contact 3-manifolds
3. 学会等名 研究集会「葉層構造の幾何学とその応用」(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 古宇田 悠哉
2. 発表標題 3・4次元多様体のシャドウと安定写像
3. 学会等名 研究集会「接触構造, 特異点, 微分方程式及びその周辺」(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 古宇田悠哉
2. 発表標題 The disk complex and 2-bridge knots
3. 学会等名 研究集会「Graphと3次元多様体の研究」(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yuya Koda
2. 発表標題 The mapping class groups of Heegaard splittings for 3-manifolds
3. 学会等名 Capital Normal University-Hiroshima University Joint conference on Mathematics (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yuya Koda
2. 発表標題 Extending automorphisms of the genus-2 surface over the 3-sphere
3. 学会等名 Topology Seminar at Chung-Ang University (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

古宇田悠哉のホームページ https://home.hiroshima-u.ac.jp/ykoda/index_j.html

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------