

令和 6 年 6 月 9 日現在

機関番号：15501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2023

課題番号：17K05255

研究課題名(和文) Knotoid の多項式不変量の開発

研究課題名(英文) Construction of polynomial invariants for knotoids

研究代表者

宮澤 康行 (Miyazawa, Yasuyuki)

山口大学・大学院創成科学研究科 ・教授

研究者番号：60263761

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,000,000円

研究成果の概要(和文)：線分の3次元球面への埋め込みの像として表される「開いた」結び目である "knotoid" を対象として研究を行い、結び目理論における有名な3つの多項式不変量であるJones多項式、HOMFLY多項式、そしてKauffman多項式それぞれに対応する "knotoid" の多項式不変量を開発することに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

開発されたknotoidの多項式不変量はknotoidの分類のみならず特質の解明に役立つ。また、結び目理論への応用やその形状と深く関わる他分野、特に、DNA結び目と繋がる生物分野や高分子化合物を対象とする物理・化学分野の諸問題について解決への寄与が期待できる。さらには、その先に続く工学的・農学的分野の応用へと波及し、我々の実生活に好影響を与えるのではないかと想像される。

研究成果の概要(英文)：The principal investigator studied "knotoids" which are represented by "open" knot diagrams in a surface and successfully constructed the Jones polynomial, the HOMFLY polynomial and the Kauffman polynomial for knotoids, which correspond to the three famous polynomial invariants in knot theory.

研究分野：結び目理論

キーワード：knotoid 結び目 結び目理論

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

結び目理論の主要研究目標は結び目の分類である。結び目の分類問題を考える場合、有用かつ重要な研究手法として多項式不変量の利用が挙げられる。Alexander 多項式や Jones 多項式が結び目理論の発展に大いに貢献しているという事実がまさにその一例である。

申請者はこの数年間、マグネティックグラフという結び目を包括する空間グラフを調査対象とし、より大局的な見地から問題を考察するという立場に立って、結び目理論の研究を行ってきた。その結果、いくつかの成果を得ることが出来た。例えば、マグネティックグラフを用いることによる HOMFLY 多項式と Kauffman 多項式という多項式不変量を統一的に解釈し統合した多項式不変量の構成である。また、古典的多項式不変量とは異なるトポロジーをもつ結び目・絡み目の新しい多項式不変量の定義にも成功している。ここでは、これらを総称としてマグネティックグラフ多項式と呼ぶことにする。

結び目に関連した概念として、2012年に Turaev によって導入された“knotoid”と呼ばれる、線分の 3 次元球面への埋め込みの像として表される“開いた”結び目がある。この“開いた”結び目はこれまで研究対象としてほとんど取り上げられてこなかったが、DNA やタンパク質など自然界に現れる物質の状態を記述する道具としては非常に適した概念であるため、近年注目を集め始めた研究対象である。

Turaev は上記論文の中で、“knotoid”に対し結び目の Jones 多項式に相当する多項式不変量を定義した。また、最近、別の研究者によって、いくつかの研究結果が報告されているが、そのほとんどがこれまでに知られている結び目に対する結果に帰着させたものであり、“knotoid”そのものに対する考察結果としてはまだまだ十分とはいえない状況である。

2. 研究の目的

マグネティック“knotoid”ともいうべき拡張された“開いた”結び目を考察対象として、多項式不変量を構成し、“knotoid”の研究を進展させることが、本研究の目的である。

「研究開始当初の背景」の項で述べた状況を補うべく、“knotoid”に対し、前述したような申請者がこれまで研究してきたマグネティックグラフの概念を応用することを考えてみてはどうだろうか？というのが、本研究の着想に至った経緯である。

本研究の具体的な目標は、以下に挙げる項目の実現である。

- ・結び目の HOMFLY 多項式に相当する“knotoid”の HOMFLY 多項式を結び目の不変量を經由することなく組合せ的に構成すること。
- ・結び目の Kauffman 多項式に相当する“knotoid”の Kauffman 多項式を結び目の不変量を經由することなく組合せ的に構成すること。
- ・結び目のマグネティック多項式に相当する“knotoid”のマグネティック多項式を結び目の不変量を經由することなく組合せ的に構成すること。

また、多項式不変量構成後の具体的な目的は、次の事項について調査・考察することである。

・多項式不変量の性質・特徴を把握、その情報と“knotoid”の幾何構造との関係を解明すること。特に、“knotoid”の各種幾何構造がどのように不変量の代数的構造に影響を及ぼすのかという観点からアプローチを行う。

・得られた多項式不変量が“knotoid”の同値性の判定に関しどの程度有用であるのか？判定が不可能である場合はその原因がどのような“knotoid”の幾何構造から生ずるものであるのかを特定すること。

学術的には、「“knotoid”の分類に大いに役立つ」ことが予想される。分類が進み、また“knotoid”の特質が解明されれば、結び目理論への応用や、その形状と深く係わる他分野、特に、DNA 結び目と繋がる生物分野や、高分子化合物を対象とする物理・化学分野の諸問題について解決への寄与が期待できるのではないかと思われる。その結果はさらにその先に続く工学的・農学的分野の応用へと広がっていき、我々の実生活に好影響を与えるのではないかと想像される。

3. 研究の方法

研究目的を達成するために、結び目と“knotoid”の類似性と相違点を十分に考慮しつつ、結び目の多項式不変量の構成手法を手本に、類似のアイデアを立案、結び目の不変量を經由しない“knotoid”の多項式不変量の開発を行う。

最初に着手するのは“knotoid”の HOMFLY 多項式の開発である。遂行するための具体的な方法は次のようなものである。まずは、結び目と“knotoid”の差異に留意しながら、結び目の HOMFLY 多項式の構成方法として知られている 2 つの手法、即ち、Lickorish-Millett による結び目解消関数を用いた初等的組合せ的構成法と Kauffman, Jaeger 等に代表される、いわゆる、ステイト模型を用いる構成法を基に、類似のアイデアを立案し、模倣による不変量の構成を試みる。

障害を克服または回避出来ず、類似の手法では構成が困難である場合には、

- ・ HOMFLY 多項式という枠に囚われず、別の形の多項式不変量の構成を模索する
- ・ グラフ理論等結び目理論関連分野の研究結果に視野を広げ、情報の収集、分析を行って構成への応用を試みる
- ・ 既存の方法とは全く異なるアイデアの立案を目指す

等を実行し、研究目的の達成に尽力する。

多項式構成後は、

- ・ HOMFLY 多項式を用いた “knotoid” の分類
- ・ “knotoid” の幾何構造と HOMFLY 多項式の代数的特徴の関係解明

に研究のステージを移す。

さらに、多項式不変量計算の手間を勘案して、コンピュータの利用を可能にする計算プログラムの作成を進める。達成されたならば、次のような手順を実行する。

- ・ 10 交点以下の結び目の表を利用して、“knotoid” を多数抽出・生成する
- ・ 作成した “knotoid” について多項式を計算し、比較する
- ・ 交点数の少ない “knotoid” の表を作成する

上記実行の過程において、得られた多項式に代数的特徴が見受けられた場合、同様の特徴を持つ “knotoid” を収集・整理・分析して、共通の幾何構造をもつかどうか調査を行う。

以上の計画が順調に進展した後は、

- ・ “knotoid” の Kauffman 多項式、マグネティックグラフ多項式の開発

に着手し、多項式構成後、

- ・ 構成された多項式を用いて “knotoid” の分類を進める
- ・ “knotoid” の幾何構造と多項式の代数的特徴の関係解明を進める

を行う。さらに、研究進展のために次の計画を実施したい。

- ・ 多項式計算プログラムの開発

数多くの計算を人力で行うには限界がある。そこで、計算プログラムの開発を行い、研究の飛躍的進展を後押しすることを目指す。コンピュータでの計算が可能になれば、予想立証のための実験が行えたり、逆に数多くの計算結果を観察することで仮説を立てることが容易になるという利点がある。開発したプログラムを公開すれば、他の結び目理論の研究者にとっても有用であり、それぞれの研究の活性化、ひいては結び目理論の発展に繋がるものと推察される。

4. 研究成果

(1) 論文「An enhanced bracket polynomial for knotoids」が、Journal of Knot Theory and Its Ramifications (Vol. 28, No. 10 (2019) 1950061 (19 pages)) に掲載された。enhanced bracket 多項式はその名称から容易に想像出来るように結び目に対する bracket 多項式の “knotoid” 版と考えると分かり易い。ただし、“knotoid” 独自の特性が反映された影響により結び目の bracket 多項式に比べてより精密化されている。

(2) 論文「An oriented knotoid diagram has no characteristic states」が Kobe Journal of Mathematics, 38 巻 (2021 年 12 月, 21–33 ページ) に掲載された。研究代表者が 2019 年に発表した論文「An enhanced bracket polynomial for knotoids」(Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 28 巻) に用いられた “ステイト” と呼ばれる図式の特徴に関して研究を行い、これまで謎であった knotoid の enhanced bracket polynomial のある種の振舞いを理論的に解明した。

(3) 論文「A polynomial invariant for knotoids」が Osaka Journal of Mathematics, 58 巻 2 号 (2021 年 4 月, 239–272 ページ) に掲載された。結び目理論において良く知られている 2 変数の絡み目の HOMFLY 多項式の構成手法を参考に、定義対象を knotoid に置き換えることで、同様の多項式不変量を開発したものである。knotoid の特徴を反映することにより変数の数が 2 から 3 へ増えている。knotoid の分類や性質・特徴の特定に大いに利用が見込まれる。

(4) 結び目の Kauffman 多項式に相当する “knotoid” の Kauffman 多項式の構成と計算例を記した論文「A polynomial invariant of Kauffman type forknotoids」が専門雑誌 Journal of Knot Theory and Its Ramifications (Vol. 32, No. 9 (2023) 2350050 (46 pages), DOI:10.1142/S0218216523500505) に掲載された。この論文は同時に同専門雑誌に掲載された科学研究費基盤研究 (C) 課題番号 22K03315 の支援を受けた論文「A polynomial invariant of Kauffman type forknotoids II」(Journal of Knot Theory and Its Ramifications, Vol. 32, No. 9 (2023) 2350051 (44 pages), DOI:10.1142/S0218216523500517) と対をなす論文として位置づけられる。どちらの多項式不変量も研究代表者の論文「A multi-variable polynomial invariant for unoriented virtual knots and links」(Journal of Knot Theory and Its Ramifications 18 (2009)) の手法を “knotoid” に応用することで得られている点で極めて類似した性質を有するものであるが、不変量としては異なるトポロジーを示す点が大きな特徴である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Yasuyuki Miyazawa	4. 巻 32
2. 論文標題 A polynomial invariant of Kauffman type for knotoids	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Knot Theory and Its Ramifications	6. 最初と最後の頁 2350050
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0218216523500505	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasuyuki Miyazawa	4. 巻 58
2. 論文標題 A polynomial invariant for knotoids	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 239--272
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Yasuyuki Miyazawa	4. 巻 38
2. 論文標題 An oriented knotoid diagram has no characteristic states	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Kobe Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 21--33
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasuyuki Miyazawa	4. 巻 28
2. 論文標題 An enhanced bracket polynomial for knotoids	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Knot Theory and Its Ramifications	6. 最初と最後の頁 1950061
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0218216519500615	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasuyuki Miyazawa	4. 巻 71
2. 論文標題 Links with trivial Q-polynomial	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 19-42
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/77167716	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 宮澤 康行
2. 発表標題 KnotoidのKauffman型不変量
3. 学会等名 東京女子大学トポロジーセミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 宮澤 康行
2. 発表標題 A HOMFLY type of invariant for linkoids
3. 学会等名 拡大K00Kセミナー-2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 宮澤 康行
2. 発表標題 A three variable representation of the HOMFLY polynomial
3. 学会等名 2019年度琉球結目セミナー
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 宮澤 康行
2. 発表標題 A polynomial invariant for knotoids
3. 学会等名 研究集会「拡大K00Kセミナー2018」
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 宮澤 康行
2. 発表標題 An oriented link diagram has no singular states
3. 学会等名 研究集会「2018年度琉球結び目セミナー」
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 宮澤 康行
2. 発表標題 多項式不変量に関する最近の個人的未解決問題から
3. 学会等名 2017年度琉球結び目セミナー
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------