

令和 2 年 6 月 1 1 日現在

機関番号 : 1 2 6 0 8

研究種目 : 基盤研究(C) (一般)

研究期間 : 2017 ~ 2019

課題番号 : 1 7 K 0 5 2 5 7

研究課題名 (和文) カンドルの代数トポロジーとその低次元トポロジーへの応用

研究課題名 (英文) Algebraic topology of quandles, and its application to low dimensional topology

研究代表者

野坂 武史 (Nosaka, Takefumi)

東京工業大学・理学院・准教授

研究者番号 : 0 0 6 4 6 9 0 3

交付決定額 (研究期間全体) : (直接経費) 3,400,000 円

研究成果の概要 (和文) : 本研究の目的は、カンドルという代数を主に調べ、それをトポロジーという分野に応用する事である。カンドルの構造を多様体やべき零的な手法を用い分析し、幾つかの成果を得た。またカンドルに対し (コ) ホモロジーが定義されているが、本研究では連続版や2次係数版などの理解を与える結果を得た。またトポロジーの応用面では、3次元多様体の基本類について計算原理を与えた。特に結び目の補空間の場合や、べき零的な設定である時は、その計算法を具体的な数式で記述する事に成功した。他方で、メタべき零的な自由群に関する中心性についても結果を得る事が出来た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

数学という分野は基礎学問にして、多くの理論発展や実用的技術などにも (間接的ながらも) 影響をもたらしてきた。その中、筆者の分野は幾何学、特に3次元トポロジーを扱っている。我々は3次元空間内に生活しているが、3次元的オブジェは複雑な様相と幾何構造を擁し、未解明な点が多い。筆者の専門分野の一つとして紐の結び方は、想像以上の複雑さを擁し、数学的に興味深い研究手法が適用可能である。多くの研究手法のうち、カンドルや基本群やカップ積という手法を筆者は扱っている。これらの手法は幾何学の中で歴史あるもので、その発展は学術的意義があるものと考えている。

研究成果の概要 (英文) : The purpose of this study is to analyze quandle, which is an algebraic system, and to give its applications to the field of topology. In this study, I investigate quandles from the viewpoints of manifolds and nilpotent methods, and obtained some results. Meanwhile, given a quandle, a (co)-homology theory is defined; from the viewpoints, I calculate quandle cohomology with smoothness and the second cohomology. In applications to topology, I gave a procedure of computing the fundamental 3-class of a 3-dimensional manifold. If the manifold is a knot complement or we are give a nilpotent setting, I showed that the procedure can be described as a concrete formula. I also gave some results on centrality of meta-nilpotent quotient groups of the free group.

研究分野 : トポロジー

キーワード : トポロジー 3次元多様体 カンドル 結び目

1. 研究開始当初の背景

筆者の研究分野は幾何学, 特に 3 次元多様体のトポロジーである. 3 次元幾何は研究手法が広く深く発展し, またトポロジカルな不変量も多く編み出され研究されてきた. その中, 筆者は群コホモロジーや代数トポロジーの手法を 3 次元幾何に組み合わせる研究を行ってきた. 具体的には, 基本群(と幾何構造の対応)やホモロジー理論やホモトピー論などを用いた. また昨今では, 局所系係数の交叉理論とカップ積の関連についての研究が少しずつ進展しており, 筆者もその関連についてアーベル的局所系の場合に結果を幾つか得ていた.

他方で, 筆者はこの 10 年間カンドルという代数系の研究も行ってきた. ここでカンドルとは, おおよそ群の共役作用を二項演算とみなした代数系である. カンドルは低次元トポロジーに相性が良い事が良く知られ, 筆者も応用例を与える研究を行ってきた. 過去の研究で培われた手法と蓄積を基に, さらにカンドル理論の深化と, トポロジカルな応用を目指していた. 特に, カンドルの利点として, トポロジカルな不変量の計算を簡易化・可視化させる方向で研究を進めていた.

2. 研究の目的

大きな研究目的として, カンドルの応用の発展 3 次元多様体の被覆理論の発展 既存の不変量との比較, 特に新しく速い計算法の確立, の 3 点を目指している. これらを実行するに当たり, 段階的な計画を模索している. そこで当該期間内では次の 3 点を研究目的とした. 即ち,

- (I) 結び目群表現の相対基本類の理解とその深化
- (II) ベキ零的な被覆空間の進展と, ミルナー不変量との関係性,
- (III) 2 次線形形式による結び目理論の展開にむけ, 被覆空間上の交差理論とコホモロジーへの言及.

この 3 点を進めることで, カンドルの有用性が確認され, さらに既存の位相不変量の研究手法を新たに展開できると, 期待した. また(II)の研究において(ベキ零の次数に応じて)段階的な計画を遂行する事で, ベキ零的な研究の有用性を明確にしアピールできると考えた.

3. 研究の方法

研究手法はカンドルのみならず, 多くの数学的手法を用いた方向性を目指している. 例えばキーワードを列挙すれば, 相対群ホモロジー, ホモトピー論, カップ積とポアンカレ双対性, Enriched Chern-Weil 理論による 2 次特性類, 多重双線形式理論, 冪零群の代数的手法などがある. 他方で, 扱いたい 3 次元の不変量として, Dijkgraaf-Witten 不変量, ミルナー不変量, 相対基本類, 複素双曲体積, 量子不変量などがある. これらの不変量に, 上記の方法を上手く組み合わせ適用させることで, 新しい性質や関係性の発見や, 新しい計算法を構築する. これらが構築された後, 3 次元多様体や結び目の例が多くある為, 拘置した計算法を具体的な例に適用し, 非自明性の確認や不変量の汎用性を確かめることを行う.

4. 研究成果

上記の(I)(II)(III)に応じて部分的な結果が得られ, 実際その結果は(査読付き)論文として出版された. またそれら以外にも副産物として幾つかの結果を得ている. 以下, これらの結果を論文ごとに説明する.

まず(I)に関する研究として, 筆者は次の論文で満足する結果を得る事が出来た.

[1]T. Nosaka, On the fundamental relative 3-classes of knot group representations; Geometriae Dedicata 2019, 1--24

ここでは結び目群表現の相対基本類に関して, 2 次元的図的計算法を与えた. この相対類は一般的な設定で定義され, 幾つかの既存の不変量を抽出する事ができるものである. 当研究の進展の鍵となる方針は相対群ホモロジーを組合せの議論に落とすことである. その際に, カンドルのホモロジーとある鎖準同型が役に立った. 3 次元幾何における有用な概念 Malnormality という条件が有効に働き, その計算法と双曲構造とを対応づけながら定式化する事が出来た. 総じて, その相対基本類は或る意味計算可能なものとして扱えるようになった. その計算法を与えられる条件は広範なもので, 今後計算する上で役立つことを期待している.

- [2] H. Kodani, T. Nosaka, Milnor invariants via unipotent Magnus embeddings *Topology and its Applications*, 271, 15
- [3] T. Nosaka, Cocycles of nilpotent quotients of free groups, *J. Math. Soc. Japan* 2020 年 72 巻 1 号 p. 171-184
- [4] T. Nosaka, Milnor-Orr invariants from the Kontsevich invariant, to appear *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 56, Issue 1, 2020, pp. 173--193

この 3 つの論文では(II)の 3 次元多様体のべき零的研究を行った(この研究は小谷久寿との共同研究である)。まず[2]ではミルナー不変量という古典的量を(べき単的なマグナス展開を整備しながら)再定式化を行った。その事により、多くのミルナー不変量を計算機を通じて計算出来た。ミルナー不変量はそれほど強い不変量ではない事が指摘出来た。加えて、高次のミルナー不変量も改めて定式化し、高次化にふさわしい普遍性を示すことが出来た。その再定式化と高次化のアイディアはカンドルの中心拡大・被覆理論に基づいている。

次に[3]では、ミルナー不変量で現れる自由群のべき零商に関し、3 次(コ)ホモロジー群について研究を行った。具体的には Orr-Igusa 氏らの結果を用いて、3 次の群コホモロジーの基底を与え、マッセイ積との関連を与えた。この事により、Milnor-Orr 不変量というものにマッセイ積による解釈を与えた。当研究の副産物としてマッセイ積関係の既存の有名な結果について短い証明を幾つか与える事ができた。また幾つかのマッセイ積のコサイクル表示も具体的に(複雑ながらも)与えている。

また[5]ではその Milnor-Orr 不変量に関して、Kontsevich 不変量(のツリー部分)とミルナー μ 不変量から研究を行った。当論文の主結果は(少々条件が要するが)その三つの不変量が等価である事である。これにより、Kontsevich 不変量のツリー部分に、位相的解釈を与える事が出来た。またミルナー μ 不変量を通じる事で、Milnor-Orr 不変量の簡易化された計算方針を提示することが出来た。しかしながらツリーでない部分の Kontsevich 不変量の研究は今後の課題である。

- [5] T. Nosaka, Meta-nilpotent quotients of mapping-torus groups and two topological invariants of quadratic forms, to appear *Osaka Journal of Mathematics*

この論文では、目的(III)について初段階的な結果を得た。つまりべき零的な研究の始めのステップとして、2 階べき零商から研究を開始したが、その際に、そのべき零商の中心性について興味深い結果を得られた。その中心はかなり大きく、階数の計算公式も与えることが出来た。いくつかの中心元の具体的な表示も与えた。また位相的な応用として、結び目や写像類群に関して、その中心に値を持つような位相的不変量を定式化した。その不変量は 2 次形式の形を取り、他の不変量(Blanchfield ペアリング等)との比較を行った。この不変量は計算機を用いれば容易に計算する事ができ、Blanchfield ペアリング等と相異なる様相を例示する事が出来た。アレクサンダー多項式が複雑である場合、この不変量は強いことが観察できた。

- [6] T. Nosaka, Twisted cohomology pairings of knots III; triple cup products, in preparation, to appear *Hiroshima Math journal*

この論文では、2 次形式のみならず、3 次形式の不変量について議論を行った。具体的には、結び目が Malnormal という条件を満たすとき(カンドルコサイクル不変量の構成を 3 次線形化することで)、その 3 次形式の不変量を 2 次元的図式を用いる計算法を確立した。また 3 重分岐被覆の不変量も導入し、非自明である例を多く与えることが出来た。但し、この不変量の非自明な例を多く見つける事が出来ず、課題の多い不変量である事が数値実験で確認された。

次に当研究で副産物として得られた論文・専門書の結果を説明する。

- [7] T. Nosaka, de Rham theory and cocycles of cubical sets from smooth quandles, *Kodai Mathematical Journal*, Volume 42, Number 1 (2019), 111--129.

この論文はカンドルの研究の副産物として、多様体版のカンドルと特性類について研究を行った。まず deRham ホモトピー理論を用いる事で、カンドルの分類空間の有理コホモロジーを計算し、有理ホモトピー群の計算手法の(条件付き)定理を得る事が出来た。その際に、 n -多様体というクラスに対し、deRham の定理を示した事が鍵であった。また 2 次特性類からカンドルのコホモロジーの元を産出する大枠を提唱する事が

出来た．しかしその具体的記述と例については今後の課題として残された．

[8] R. P. Bakshi, D. Kunkel, S. Mukherjee, T. Nosaka and J. H. Przytycki, Schur Multipliers and Second Quandle Homology, preprint, Journal of Algebra, Volume 552, 15 June 2020, Pages 52--67

この論文では、2 次の群ホモロジーと2 次のカンドルホモロジーについての関係性を論じた．ある条件下では、その二つが同型となる鎖写像を与えた．その応用として、連結なアレクサンダーカンドルというクラスに関して、2 次カンドルホモロジー群を全て決定することが出来た．

最後に、約 10 年間のカンドル理論の研究をまとめ、著書を執筆した事を言及する．

T. Nosaka, Quandles and Topological Pairs---Symmetry, Knots, and Cohomology, Springer brief

本書ではカンドルの基礎事項から始まり、多くの項目の解説を行った．キーワードを羅列すると、彩色の特徴づけ、コホモロジー理論、カンドルの分類空間の位相的研究などがある．また応用となる例を幾つか例示することで、カンドルの実用的な応用を紹介した．カンドルの多くの性質や定理や応用が整理されており、カンドル理論の普及にも貢献する業績を残したと思われる．

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件／うち国際共著 1件／うちオープンアクセス 7件）

| | |
|---|-----------------------|
| 1. 著者名 Takefumi Nosaka | 4. 巻 42 |
| 2. 論文標題 de Rham theory and cocycles of cubical sets from smooth quandles | 5. 発行年 2019年 |
| 3. 雑誌名 KODAI MATHEMATICAL JOURNAL | 6. 最初と最後の頁 111-129 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2996/kmj/1552982509 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|------------------------|
| 1. 著者名 Takefumi Nosaka | 4. 巻 B66 |
| 2. 論文標題 Central extensions of groups and adjoint groups of quandles | 5. 発行年 2017年 |
| 3. 雑誌名 RIMS KOKYUROKU | 6. 最初と最後の頁 167--184 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である） | 国際共著 - |

| | |
|---|---------------------|
| 1. 著者名 Takefumi Nosaka | 4. 巻 11 |
| 2. 論文標題 Bilinear-form invariants of Lefschetz-fibrations over the 2-sphere | 5. 発行年 2017年 |
| 3. 雑誌名 Journal of Gokova Geometry Topology | 6. 最初と最後の頁 32-55 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である） | 国際共著 - |

| | |
|---|-----------------------|
| 1. 著者名 Takefumi Nosaka | 4. 巻 72 |
| 2. 論文標題 Cocycles of nilpotent quotients of free groups | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan | 6. 最初と最後の頁 171-184 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である） | 国際共著 - |

| | |
|---|---------------------|
| 1. 著者名 Takefumi Nosaka | 4. 巻 204 |
| 2. 論文標題 On the fundamental 3-classes of knot group representations | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Geometriae dedicata | 6. 最初と最後の頁 1--24 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1007/s10711-019-00442-4 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である) | 国際共著 - |

| | |
|--|-------------------------|
| 1. 著者名 Nosaka Takefumi | 4. 巻 56 |
| 2. 論文標題 Milnor-Orr Invariants from the Kontsevich Invariant | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences | 6. 最初と最後の頁 173 ~ 193 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/PRIMS/56-1-7 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である) | 国際共著 - |

| | |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名 Bakshi Rhea Palak, Ibarra Dionne, Mukherjee Sujoy, Nosaka Takefumi, Przytycki J?zef H. | 4. 巻 552 |
| 2. 論文標題 Schur multipliers and second quandle homology | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Journal of Algebra | 6. 最初と最後の頁 52 ~ 67 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2019.12.027 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である) | 国際共著 該当する |

| | |
|---|-------------------------------|
| 1. 著者名 Kodani Hisatoshi, Nosaka Takefumi | 4. 巻 271 |
| 2. 論文標題 Milnor invariants via unipotent Magnus embeddings | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Topology and its Applications | 6. 最初と最後の頁 106991 ~ 106991 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) doi.org/10.1016/j.topol.2019.106991 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である) | 国際共著 - |

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 0件）

| |
|---|
| 1. 発表者名 野坂 武史 |
| 2. 発表標題 de Rham theory and cocycles of cubical sets from smooth quandles |
| 3. 学会等名 日本数学会2018 年度秋季総合分科会 |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|-------------------------------------|
| 1. 発表者名 野坂 武史 |
| 2. 発表標題 べき単的マグナス展開を用いたMilnor 不変量 |
| 3. 学会等名 日本数学会2017 年度秋季総合分科会 |
| 4. 発表年 2017年 |

| |
|--------------------------------|
| 1. 発表者名 野坂 武史 |
| 2. 発表標題 自由群のべき零商の群コサイクル |
| 3. 学会等名 日本数学会2017 年度秋季総合分科会 |
| 4. 発表年 2017年 |

| |
|--------------------------------------|
| 1. 発表者名 野坂 武史 |
| 2. 発表標題 3次元トポロジーのべき零的研究 |
| 3. 学会等名 日本数学会2018 年度春季総合分科会（招待講演） |
| 4. 発表年 2018年 |

〔図書〕 計1件

| | |
|---|-----------------|
| 1. 著者名 Takefumi Nosaka | 4. 発行年 2017年 |
| 2. 出版社 Springer | 5. 総ページ数 150 |
| 3. 書名 Quandles and Topological Pairs---- Symmetry, Knots, and Cohomology | |

〔産業財産権〕

〔その他〕

| |
|---|
| 野坂武史 (Takefumi Nosaka) のホームページからの論文一覧を閲覧可能 http://www.math.titech.ac.jp/~nosaka/papers.html |
|---|

6. 研究組織

| | | | |
|--|---------------------------|-----------------------|----|
| | 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|--|---------------------------|-----------------------|----|