

令和 3 年 6 月 14 日現在

機関番号：13501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K05265

研究課題名(和文)局所変形と結び目の幾何・代数の研究

研究課題名(英文)Studies on geometry and algebra of knots and local moves

研究代表者

中村 拓司 (NAKAMURA, Takuji)

山梨大学・大学院総合研究部・教授

研究者番号：60382024

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究においては主に結び目の局所変形を視点とした結び目の幾何的性質、代数的性質やそれらの関連性の研究に関して成果をあげた。具体的には、(1)パス変形という局所変形が溶接結び目の結び目解消操作であることを示した。(2)パス変形1回でほどける溶接結び目でのConway多項式の係数の実現問題に部分解を与えた。(3)仮想結び目のねじれ多項式を変えない局所変形であるシェル変形を導入し、ねじれ多項式をシェル変形で特徴付けた。2成分の仮想絡み目への拡張も得た。(4)有向閉3次元多様体を表す仮想結び目図式とその局所変形をとおして、有向閉3次元多様体の不変量を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の目的は局所変形を通して、結び目の幾何的・代数的性質やそれらの関連性を明らかにすることであった。(1)古典的結び目ではパス変形は結び目解消操作でないため、溶接結び目特有の現象であり、溶接結び目の幾何的な研究の発展につながると考えている。(2)任意のConway多項式を実現するパス変形1回でほどける古典的結び目の構成は未解決であるが、溶接結び目での構成法からの応用が期待される。(3)仮想結び目の代数的不変量の特徴付ける局所変形を導入できた。別の不変量に対する同様の研究の展開が示唆される。(4)有向閉3次元多様体の計算可能な不変量を図式から得られたことは1つの研究方向を与えたと考えられる。

研究成果の概要(英文)：In this studies, we obtain several results about relationships among local moves and invariants of knots. (1) We show that the pass move is an unknotting operation for welded knots. (2) We give a partial answer about the realization problem of Conway polynomials for a welded knot of pass unknotting number one. (3) We give a characterization of the writhe polynomial for a virtual knot in terms of shell moves. We also generalize it for 2-component virtual links. (4) We obtain an invariant of a closed oriented 3-manifold via its virtual knot diagram presentation and local moves.

研究分野：結び目理論

キーワード：結び目 局所変形 仮想結び目 溶接結び目 パス変形 Conway多項式 ねじれ多項式 シェル変形

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

3次元球面内の結び目に対し、結び目理論では「与えられた2つの結び目が同値かどうか判定せよ」という分類問題が最も基本的な問題であり、このために様々な不変量が開発されてきた。一方で、個々の結び目や結び目族についてその幾何的性質や代数的性質を明らかにするという問題も中心的な課題である。その中で、交差交換をはじめとする結び目図式の一部を別の部分に取り換えるという局所変形を視点とする研究があった。ある局所変形での既存の不変量の変化の研究、その局所変形で不変量の開発などである。ある局所変形1回でほどける結び目の特徴付けなどは、その局所変形自体が持つ幾何的性質や、結び目の代数的性質への影響を調べる上で重要なものであり、未解決な問題も残っていた。また、この流れにおいて、仮想結び目や溶接結び目に対しても同様の局所変形を視点とした研究を進めることが結び目理論全体への貢献も含め必要であると考えられるようになっていた。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は局所変形を通して結び目の幾何的性質と代数的不変量の関係を明らかにすることである。特にパス変形に注目し、Conway多項式などの性質の研究や仮想結び目や溶接結び目における影響を明らかにする。既存の不変量とマッチする局所変形の開発を行い、この局所変形を通して、結び目の幾何的・代数的性質の関連性を明らかにし、結び目理論に新しい展開を与える。外部空間の幾何的性質や3次元多様体と不変量との関連を結び目の局所変形を通して解明することも目的とする。

### 3. 研究の方法

パス変形に関する Conway多項式の実現問題については、パス変形1回でほどけるタングルの開発、それが埋め込まれた結び目族に対する計算機による計算実験、その結び目の Seifert 行列での特徴付けという流れを繰り返し、実現問題の解決を目指すという手法を用いた。仮想結び目や溶接結び目のパス変形や他の局所変形に関する研究については、仮想結び目図式上での変形他、仮想結び目図式を表現するガウス図式を用いた。また、仮想結び目の不変量の値に対応するガウス図式の標準形を作り、一般のガウス図式からの変形過程を調べた。有向閉3次元多様体を表す仮想結び目図式から不変量を構成する際には、結び目理論における Fox coloring やカンドル理論の考え方を用いた。

### 4. 研究成果

(1) 古典的結び目の Conway多項式の2次の係数のパリティ (Arf不変量) は、パス変形で変わらないことが知られている。よって、Conway多項式の2次の係数が奇数であるような古典的結び目はパス変形では決してほどけないことが分かる。つまり、パス変形は古典的結び目では結び目解消操作ではない。それに対し、結び目の拡張である溶接結び目というカテゴリにおいては、パス変形が結び目解消操作であることを佐藤進氏(神戸大学)、中西康剛氏(神戸大学)、安原晃氏(早稲田大学)との共同研究において示した。これは溶接結び目特有の現象であることを意味し、溶接結び目の幾何的研究に1つの方向性を与える結果であると考えている。

(2) 2次の係数が偶数である任意の Conway多項式がパス変形1回でほどける古典的結び目で実現されるかという問題が本研究課題のコアであった。溶接結び目でも古典的結び目図式で表示されるものについては Conway多項式が計算される。パス変形1回でほどける溶接結び目について、Conway多項式の2次の係数が $\pm 1$ で他の係数が任意にとれるものが存在することを佐藤進氏(神戸大学)、中西康剛氏(神戸大学)、安原晃氏(早稲田大学)との共同研究において示した。Conway多項式の2次の係数のみをみたら $\pm 1$ 以外でも任意の奇数でとれることは独自に示している。

(3) 仮想結び目にはねじれ多項式という不変量がある。これは仮想結び目の奇ねじれ数という不変量の拡張であり、奇ねじれ数はクシイ変形という局所変形と対応している。佐藤進氏(神戸大学)、中西康剛氏(神戸大学)との共同研究において、ねじれ多項式に対応するシェル変形と

いう局所変形を導入し、実際にねじれ多項式が一致する二つの仮想結び目がシエル変形で移り合うことを示した。また、2成分の仮想絡み目について、シエル変形に対応する不変量を構成した。

(4) 有向閉 3 次元多様体はフロースパインという概念を通して仮想結び目図式で表すことができる。また、この仮想結び目図式による表示において、有向閉 3 次元多様体の同値を誘導する局所変形があることが知られている、この局所変形を通して、石井一平氏、斎藤敏夫氏(上越教育大学)との共同研究において有向閉 3 次元多様体の彩色不変量を得た。これは、仮想結び目図式から計算されるもので、結び目理論における Fox coloring やカンドル理論の考え方を応用させたものである。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Nakamura Takuji, Nakanishi Yasutaka, Satoh Shin	4. 巻 84
2. 論文標題 Writhe polynomials and shell moves for virtual knots and links	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 European Journal of Combinatorics	6. 最初と最後の頁 103033
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.ejc.2019.103033	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nakamura Takuji, Nakanishi Yasutaka, Satoh Shin	4. 巻 29
2. 論文標題 A note on coverings of virtual knots	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Knot Theory and its Ramifications	6. 最初と最後の頁 1971002
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0218216519710020	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nakamura Takuji, Nakanishi Yasutaka, Satoh Shin, Yasuhara Akira	4. 巻 247
2. 論文標題 The pass move is an unknotting operation for welded knots	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 9~19
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.topol.2018.07.005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nakamura Takuji, Nakanishi Yasutaka, Satoh Shin	4. 巻 27
2. 論文標題 Finiteness of the set of virtual knots with a given state number	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Knot Theory and Its Ramifications	6. 最初と最後の頁 1850049~1850049
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0218216518500499	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nakamura Takuji, Nakanishi Yasutaka, Saito Masahico, Satoh Shin	4. 巻 222
2. 論文標題 The 6- and 8-palette numbers of links	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 200 ~ 216
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2017.02.080	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hayashi Taiki, Nakamura Takuji, Nakanishi Yasutaka, Satoh Shin	4. 巻 26
2. 論文標題 The palette numbers of torus knots	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Knot Theory and Its Ramifications	6. 最初と最後の頁 1750060 ~ 1750060
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0218216517500602	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nakamura Takuji, Nakanishi Yasutaka, Saito Masahico, Satoh Shin	4. 巻 26
2. 論文標題 The palette numbers of 2-bridge knots	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Knot Theory and Its Ramifications	6. 最初と最後の頁 1750047 ~ 1750047
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S021821651750047X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計13件 (うち招待講演 12件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 中村拓司, 石井一平, 斎藤敏夫
2. 発表標題 Flow spines and virtual knot diagrams
3. 学会等名 Knots in Tsushima 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 中村拓司, 石井一平, 斎藤敏夫
2. 発表標題 3次元多様体の仮想結び目図式による表示に対する彩色不変量
3. 学会等名 拡大KOOKセミナー2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 中村拓司, 比嘉隆二, 中西康剛, 佐藤進
2. 発表標題 仮想結び目の奇交点对から得られる不変量について
3. 学会等名 慶應トポロジーセミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 中村拓司
2. 発表標題 仮想結び目図式のある局所変形について
3. 学会等名 2019年度琉球結び目セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 中村拓司
2. 発表標題 On welded knots which can be unknotted by a single pass move
3. 学会等名 拡大KOOKセミナー2018 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 中村拓司
2. 発表標題 結び目およびその一般化に対する局所変形について
3. 学会等名 大阪市立大学数学研究所談話会（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 中村拓司
2. 発表標題 On local moves among the trefoil, the figure-8, and the unknot
3. 学会等名 2018年度琉球結び目セミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 中村拓司
2. 発表標題 局所変形と互いに距離1の3つの結び目
3. 学会等名 大阪電気通信大学トポロジーセミナー；低次元多様体の幾何的性質と不変量の研究（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 中村拓司，中西康剛，佐藤進，安原晃
2. 発表標題 Pass moves for welded knots
3. 学会等名 拡大KOOKセミナー2017（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 中村拓司, 中西康剛, 佐藤進
2. 発表標題 仮想結び目のある半順序について
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会トポロジー分科会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 中村拓司
2. 発表標題 溶接結び目をほどく
3. 学会等名 2017年度琉球結び目セミナー (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 中村拓司
2. 発表標題 結び目の局所変形と多項式不変量について
3. 学会等名 群馬大学トポロジーセミナー (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 中村拓司, 中西康剛, 佐藤進, 安原晃
2. 発表標題 溶接結び目に対するパス変形について
3. 学会等名 東京女子大学トポロジーセミナー (招待講演)
4. 発表年 2017年



〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

山梨大学 教育研究活動データベースシステム  
<http://nerdb-re.yamanashi.ac.jp/Profiles/353/0035286/profile.html>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------