

令和 5 年 6 月 16 日現在

機関番号：12605

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2022

課題番号：17K05269

研究課題名(和文)自由因子に特異点をもつ微分方程式と関連する幾何学

研究課題名(英文)Differential Equations with singularities on free divisors and related Geometry

研究代表者

関口 次郎 (Sekiguchi, Jiro)

東京農工大学・工学(系)研究科(研究院)・名誉教授

研究者番号：30117717

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：フロベニウス多様体のポテンシャルとその拡張である平坦構造のポテンシャル・ベクトル場の構成が中心的な研究テーマである。成果の1つは、パウルベVI方程式の代数解からポテンシャル・ベクトル場を構成すること、また複素鏡映群に関するポテンシャル・ベクトル場を構成することを確立した。これは、加藤満生、眞野行両氏との共同研究である。

第2の成果は、代数的フロベニウス多様体のポテンシャルのいくつかの例を構成し、実鏡映群のE6,E7型実鏡映群の代数的ポテンシャルと複素鏡映群No.33,No.34を与えたことである。

研究成果の学術的意義や社会的意義

フロベニウス多様体の一般化である平坦構造の構成、その中心的対象であるポテンシャルベクトル場の構成とパウルベVI方程式の代数解との対応の明確化、また複素鏡映群の場合のポテンシャルの存在と構成について基本的な成果が得られた。平坦構造の重要性についての意義を与えることができた。代数的フロベニウス多様体のポテンシャルの例の構成はあまりなかったが、本研究ではいくつかの例を構成できた。本研究の意義は、代数的フロベニウス多様体と複素鏡映群との関係を与えたこと、1970年代に定式化された複素鏡映群についてのアーノルドの問題に対する進展を得たことである。

研究成果の概要(英文)：The principal researcher of this research studied mainly two subjects.

The first subject concerned with the construction of potential vector fields of flat structures. The flat structure is a generalization of Frobenius manifolds established by the principal researcher and collaborators Mitsuo Kato and Toshiyuki Mano. There are two interesting examples of such structure. One is related to Painleve VI equation and the other is related to complex reflection groups. Concerning to these examples, we constructed corresponding potential vector fields. The second subject is the construction problem of algebraic potentials of Frobenius manifolds. The principal researcher constructed some examples of such potentials and in particular showed an interesting relationship between two examples related with reflection groups of types E6 and E7 and complex reflection groups No.33 and No.34. As a consequence an answer to the Arnold Problem on complex reflection groups are given to these two groups.

研究分野：解析学

キーワード：WDVV方程式 代数的ポテンシャル 実鏡映群

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

本研究の出発点となる論文は K.Saito, T.Yano, J.Sekiguchi: On a certain generator system of the ring of invariants of a finite reflection group, Comm. Algebra 8(1980), 373-408 である。この論文の成果はその後 1990 年代に、B. Dubrovin によって、2 次元位相場の理論に由来する WDVV 方程式と統合されフロベニウス多様体の理論として定式化された。さらに 3 次元の場合にフロベニウス多様体とパンルベ VI 方程式の 1-パラメータ族との間に 1 対 1 の対応があることが明らかにされた。また Hertling 等によって、多項式フロベニウス多様体と有限実鏡映群との対応も確立された。フロベニウス多様体は理論物理と数学の新しい架け橋として発展する可能性があった。

2. 研究の目的

本研究が始まるまでに、いくつかの準備的な成果が得られていた。その中でも重要なものは、フロベニウス多様体の拡張である平坦構造の定式化ができたことである。フロベニウス多様体の中心的な役割を果たすのは WDVV 方程式である。この方程式の解をポテンシャルという。平坦構造の定式化において重要な概念は拡張 WDVV 方程式である。この方程式の解は関数を成分とするベクトルであり、ポテンシャルベクトル(以下 PV と略す)と呼んだ。本研究では、この平坦構造に関係することを研究する。中心的な課題はふたつある。ひとつはパンルベ VI 方程式と平坦構造の関係である。もうひとつは平坦構造と複素鏡映群との関係である。

3. 研究の方法

本研究は主に、琉球大学の加藤満生名誉教授、眞野智行教授との共同研究である。本研究代表者が琉球大学に出張するか、加藤、眞野両氏が東京農工大学に出張するなどして、議論して研究を進展させる。また、必要に応じて数式処理ソフト Mathematica を、予測の確認、実例の構成等に役立てた。

4. 研究成果

(1) 拡張 WDVV 方程式の解とパンルベ VI 方程式の対応(加藤、眞野氏との共同研究)。
Dubrovin は 3 変数の場合の WDVV 方程式の解とパンルベ VI 方程式の 1-パラメータ族との対応を与えた。ところで、パンルベ VI 方程式にはパラメータが 4 個ある。したがって、WDVV 方程式だけではパンルベ VI 方程式全体を統制できない。本研究では、拡張 WDVV 方程式とパンルベ VI 方程式との対応を与えた。これは、パンルベ VI 方程式全体を扱うには拡張 WDVV 方程式を考える必要があることを意味しており、平坦構造は自然な枠組みであることを示していることにもなる。

(2) パンルベ VI 方程式の代数解に対応する PV の構成(加藤、眞野氏との共同研究)。

PV は拡張 WDVV 方程式の解のことである。一方では、パンルベ VI 方程式の代数解は Boalch、Lisovsky-Tykhyy などによって分類され、また明示的な式も得られた。そこでパンルベ VI 方程式の代数解に対応する PV を構成する問題は基本的なテーマと思われる。代数解はいくつかの系列と 45 種類の解に分類された。本研究では、45 種類の解に対応する PV をすべて求めた。いくつかの場合は表示が複雑なので公表していないが、ほとんどの場合の PV は論文に公表した(論文 Flat structure and potential vector fields related with algebraic solutions to Painleve VI solution 参照)。また特別な 5 種類の代数解の場合にはポテンシャルが存在する。以前に Dubrovin-Mazzocco によって求められていたこれら 5 種類の代数解に対応するポテンシャルの中には 10 ページ程度の長い表示式が知られていただけだったが、1 行程度の短い表示を求めることもできた。

(3) 複素鏡映群に対応する平坦構造について(加藤、眞野氏との共同研究)。

Hertling 等によって、WDVV 方程式の多項式解と有限実鏡映群とが 1 対 1 に対応することが示された。複素鏡映群の場合にどうなるか。特に複素鏡映群の場合に平坦座標と呼ばれる不変式環の生成系を定義し求めることができるか。これは 1980 年の Saito-Yano-Sekiguchi の論文以来の未解決問題であった。well-generated と呼ばれる複素鏡映群の族に対して、この問題を解決した。well-generated な複素鏡映群は複素鏡映群の多くを含む自然な枠組みであり、満足できる結果である。

(4) 複素鏡映群に対応する PV の構成。

実鏡映群に対応するポテンシャルを構成することは興味ある問題であったが、同様に複素鏡映群に対応する PV を求めることも興味ある問題である。特に系列に含まれない well-generated である複素鏡映群を取り上げた。鏡映の集合への群作用が推移的であるような複素鏡映群に対しては PV は自己同型を除いて一意になることが示された(以上は加藤、眞野氏との共同研究)。ただし拡張 WDVV 方程式の解の中には退化したものもあるので、厳密には微妙なところがある。特に例外的な複素鏡映群の中で位数が最大な群(ST34 と呼んでいる)の場合の計算は大変である。いくつかの付随条件を吟味することで退化した解を除外して一意性を示せた。(論文 Solutions to extended WDVV equations; ST34, E8 cases 参照)

(5) 三重ハミルトン構造をもつ代数的ポテンシャルについて

ひとつの重みの変数が n 個あり、しかも 2 種類しか重みのない $2n$ 変数の代数的ポテンシャルを三重ハミルトン構造をもつ代数的ポテンシャルという。最も次元の低い場合は 4 変数の場合である。これらの場合は D4, F4, H4 型実鏡映群が関係していることが知られている。一方では階数 3 の既約実鏡映群は A3, B3, H3 型である。問題は、A3 型(B3 型, H3 型)の多項式ポテンシャルと D4 型(F4 型, H4 型)の代数的ポテンシャルが対応するか?(正確な意味は省略する)これを示す

ために、4 個のパラメータを持つ D4 型の代数的ポテンシャルの族を求めた。それから構成される常微分方程式が A3 型多項式ポテンシャルから構成される常微分方程式が一致することを示した。B3, F4 型の場合にも同様な結果を示した。

(6)代数的ポテンシャルの構成問題

多項式ポテンシャルと実鏡映群が 1 対 1 に対応することは Hertling 等によって証明された。Dubrovin はこの結果を拡張した予想を定式化した。それは、代数的ポテンシャルと primitive 共役類という実鏡映群のある種の共役類とが 1 対 1 に対応するだろう、という予想である。特に多項式ポテンシャルは Coxeter-Killing 共役類が対応している。知られていた多項式でない代数的ポテンシャルは、Dubrovin-Mazzocco の求めた H3 型のもの 2 種類、Pavlyk によるものが D4 型、Dinar によるものが F4 型、E8 型にそれぞれ 1 種類、計 5 種類であった。研究代表者は Douvropoulos の共役類についてのデータをもとに、H4 の場合に 6 種類、E6, E7, E8 型の場合にそれぞれ 1 種類を構成した。また Dinar の構成した E8 型の代数的ポテンシャルは印刷に 6 ページを必要とする長い式だったが、簡明な表示を求めた。

(7)代数的ポテンシャルと単純特異点の変形族

(6)で説明した Dubrovin の予想に関連して、代数的ポテンシャルと単純特異点の変形族と対応があるのではないかと示唆される結果を得た。考察したのは E6, E7, E8 型の 2 次式が関係する代数的ポテンシャルの場合であるが、これらの場合に対応する単純特異点の(半普遍変形族でない)変形族を構成した。さらに E6 型の場合には対応する E6 型特異点の変形族の部分変形族が ST33 という複素鏡映群と関係すること、E7 型の場合には対応する E7 型特異点の部分変形族が複素鏡映群 ST34 と関係することを示せた。この事実は実鏡映群の代数的ポテンシャルと複素鏡映群の平坦構造に密接な関係があることを示唆しているように思える。これは今後の研究の課題である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 5件）

1. 著者名 Yassir Dinar, Jiro Sekiguchi	4. 巻 170
2. 論文標題 The WDVV solution E8(a1)	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Geometry and Physics	6. 最初と最後の頁 1,11
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Jiro Sekiguchi	4. 巻 1
2. 論文標題 The algebraic potentials having tri-hamiltonian structures of the reflection groups of types D4, F4, H4	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Formal and Analytic Solutions of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 23-85
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Mitsuo Kato, Toshiyuki Mano, Jiro Sekiguchi	4. 巻 16
2. 論文標題 Flat structure on the space of isomonodromic deformations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications	6. 最初と最後の頁 1-36
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 M.Kato, T.Mano, J.Sekiguchi	4. 巻 1
2. 論文標題 Solutions to the extended WDVV equations and the Painleve VI equation	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Complex differential and difference equations	6. 最初と最後の頁 344-364
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 J. Sekiguchi	4. 巻 64
2. 論文標題 Solutions to extended WDVV equations;ST34, E8 cases	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Rev.Roumaine Math. Pures Appl.	6. 最初と最後の頁 563-581
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 M. Kato, T. Mano, J, Sekiguchi	4. 巻 38
2. 論文標題 Flat structure and potential vector fields related with algebraic solutions to Painleve VI equation	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Opuscula Mathematica	6. 最初と最後の頁 201-252
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計20件 (うち招待講演 18件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 関口次郎
2. 発表標題 ゴセットの6次元ポリトープについて
3. 学会等名 直観幾何学2023 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Jiro Sekiguchi
2. 発表標題 Algebraic potentials of type $E_n(n=6,7,8)$ defined by quadratic equation
3. 学会等名 Workshop on Frobenius Manifolds and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 関口次郎
2. 発表標題 Algebraic potentials and reflection groups
3. 学会等名 日本大学特異点月曜セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 関口次郎
2. 発表標題 Differential equations associated to Frobenius manifolds with trihamiltonian structure of rank four
3. 学会等名 アクセサリー・パラメータ研究会 (熊本大学) (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Jiro Sekiguchi
2. 発表標題 Fuchsian differential equations and algebraic potentials having tri-Hamiltonian structures
3. 学会等名 Workshop FASnet20 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Jiro Sekiguchi
2. 発表標題 Examples of algebraic potentials and related topics
3. 学会等名 Workshop on hyperplane arrangements and reflection groups (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Jiro Sekiguchi
2. 発表標題 The construction problem of algebraic potentials and related topics
3. 学会等名 International symposium ''Advances and perspectives in representation theory'' (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 関口次郎
2. 発表標題 The construction problem of algebraic potentials and reflection groups
3. 学会等名 2019年度表現論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 関口次郎
2. 発表標題 概Belyi写像への自由因子の理論の応用
3. 学会等名 農工大数学セミナー2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Jiro Sekiguchi
2. 発表標題 Uniqueness problem of potential vector fields related with reflection groups
3. 学会等名 Sminaire Groupes Representations et Geometrie (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 関口次郎
2. 発表標題 複素鏡映群と平坦構造
3. 学会等名 研究集会「微分方程式と表現論」(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Jiro Sekiguchi
2. 発表標題 Solutions to extended WDVV equations and Painleve VI equation
3. 学会等名 Complex differential and difference equations-onference (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 関口次郎
2. 発表標題 ポテンシャル・ベクトル場について
3. 学会等名 アクセサリー・パラメーター研究会(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 関口次郎
2. 発表標題 3次元の一般化されたWDVV方程式の特殊解について
3. 学会等名 第2回古典解析・徳島研究会(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 関口次郎
2. 発表標題 WDVV方程式の一般化とPainleve VI方程式
3. 学会等名 第16回岡シンポジウム(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Jiro Sekiguchi
2. 発表標題 Potential vector fields related with algebraic solutions to Painleve VI equation
3. 学会等名 JARCS SYDNEY 2017(University of Sydney, Australia)(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Jiro Sekiguchi
2. 発表標題 The discriminant of Valentiner reflection group and deformations of a plane curve
3. 学会等名 Seminar of Algebra (University of Seville, Spain)(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Jiro Sekiguchi
2. 発表標題 Potential vector fields related with algebraic solutions to Painleve VI equation
3. 学会等名 FASdiff2017(University of Alcalá, Spain)(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 関口次郎
2. 発表標題 The discriminant of Valentiner reflection group and deformations of a plane curve
3. 学会等名 特異点月曜セミナー（日本大学文理学部）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 関口次郎
2. 発表標題 Painleve VI方程式の代数関数解と平坦構造
3. 学会等名 数理解析セミナー（一橋大学）
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------