

令和 6 年 5 月 25 日現在

機関番号：23304

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2023

課題番号：17K05272

研究課題名(和文)量子光学に関連した数理物理学の問題

研究課題名(英文)Problems on mathematical physics related to quantum optics

研究代表者

田村 博志(TAMURA, Hiroshi)

公立小松大学・生産システム科学部・教授

研究者番号：80188440

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：以下の各項目で(1)は雑誌論文1(2)は雑誌論文2(3)はその他の論文(4)は執筆中の研究結果に関する記述である。

(1)非線形電磁場の影響下でのスカラー場の伝播関数が空間遠方において強い減衰性を持つことを示した。(2)単色光と無限成分スピンの熱浴中にある系を考えた。マスター方程式による時間発展が完全正であること、一種の同期現象が現れることなどを示した。(3)2体相互作用をするボソン系やフェルミオン系が熱浴中にある場合の系の密度行列に作用する作用素の代数がアフィン変換群の構造を持つことを示した。(4)熱浴中の一般2体相互作用するボソン系の密度行列の時間発展が完全正であることなどを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

(1)量子スカラー場の伝播関数の特徴を数学的に捉えることが出来た。この結果は、電荷を持った粒子の質量が無限大になると解釈でき、電荷の閉じ込めに関連する特徴を持つ。(2)レーザーの説明で使われるこのモデルにおいて、無限成分スピンの成分が一定の速さで下降し続ける現象が、運動の同期性と関連して説明された。(3)2体相互作用系は開放系の様々な現象を議論するための基本的道具であるが、その解析にアフィン変換群が有用であることを示した。(4)スクイーズド光を記述するための応用上重要なモデルである2体相互作用するボソン系の開放系に対し、その数学的に厳密な基礎付けを与えた。

研究成果の概要(英文)：(1)We consider the quantum theory of a nonlinear electromagnetic field coupled to a bosonic field. There are no ultraviolet divergences appeared in the usual theory of the electromagnetic field coupled to a bosonic field. We show that the propagator of the scalar field has a strong damping property in spacial infinity. (2)We consider a system in which the monochromatic light and the infinite component spin touched to a heat bath. The time evolution of the density matrix is shown to be completely positive. It was also shown that synchronization phenomena appear. (3)The algebra of the operators acting on the density matrices of any boson system as well as any fermion system with two-body interaction has been shown to have the structure of an affine transformation group. (4)We have shown that the time evolutions of the density matrix of the general two-body interacting boson systems have the property of completely positive and trace preserving.

研究分野：数理物理学

キーワード：量子光学 量子力学系 開放系 マスター方程式 Dicke Model アフィン変換群 一般2体相互作用ボソン系

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

熱浴と接触している量子系の密度行列の時間発展はマルコフ近似の下で閉じた方程式[マスター方程式]で与えられる。特にその時間発展の生成作用素[リュウビリアン]が有界の場合は、密度行列に関する完全正かつトレース保存[CPTP]変換によって、その解が与えられることが知られている。しかし、リュウビリアンが非有界の場合は CPTP となる保証は無い。実際それが成立しない場合もある。[Gorini-Kosssovskii-Sudarshan-Lindblad-Davies]

量子光学は、電磁場と物質とからなる量子系が熱浴と接触している状況を扱う分野であるといえる。電磁場と物質を扱う標準理論である量子電磁力学は紫外発散のため、これを基礎とする開放系の数学的議論は現段階では不可能である。そこで、電磁場や物質場を簡略なものに置き換えたモデルを用いた議論がなされている。

電磁場を(現実との多少の違いに目を瞑って)非線形電磁場に置き換えると紫外発散が緩和されるが、これは物質場との結合系の議論も進んでいないのが現状である。[Tamura] 一方、ディックモデルのような大幅に簡略化された量子系であっても熱浴と接触させたモデルは、リュウビリアンの非有界性によって、その CPTP を示すことは自明でない。

2. 研究の目的

(1)ベクトル場とスカラー場の結合した系を記述するモデルを検討した。4次元ユークリッド時空上のマルコフ確率場的ベクトル場の枠組みの中で電磁場を変形した非線形電磁場と、荷電スカラー場の結合された系を扱った。スカラー場の伝播関数の漸近挙動を調べることを目的とした。

(2)単色光が熱浴中にある場合(減衰振動子)の理論にすっきりした記述を与える。その方法を基礎に、単色光と無限成分スピンの相互作用する系が、熱浴中にある系(開放無限成分ディックモデル)を扱い、密度行列の長時間における漸近挙動を調べる。

(3)2体相互作用するフェルミオン系乃至ボソン系の GKSLD 型開放系に現れる作用素の交換関係はアフィン変換の代数の構造を持つことを示し、それを用いて、密度行列の時間発展を明瞭に表示出来ることを、ゲージ不変2体相互作用するフェルミオンの場合を用いて具体的に示すことが目的である。

(4)2体相互作用するボソン多体系の熱浴中での量子論である GKSLD 型のマスター方程式はリュウビリアンが非有界であるため、その解が1径数 CPTP 強連続半群を与えることは不明であった。ここでは、それを示すことが目標である。

3. 研究の方法

(1)外場の影響下でのスカラー場の遷移半群の生成元のレゾルベントを、外場に関する汎関数と考える。この外場をマルコフ確率場として、確率測度の下での期待値としてスカラー場の伝播関数が得られる。期待値の評価のために、ブラウニアンブリッジに関するファイナ

ン・カッツ・伊藤の公式による表示を用いる。

(2) 先ず、開放系の GKSLD 型のマスター方程式に現れる、密度行列に作用する作用素間の交換関係を整理する。そのための観点は、作用素を相似変換として作用するものと、相似変換の生成元として作用するものに分類することである。次に、これらの形の作用素を用いたクラウド型の半群の合成としてリヴィリアンによる時間発展を表す。CPTP 変換によって、無限成分デイクモデルの、振動子とスピンの間の結合を解除する。

(3) ゲージ不変 2 体相互作用する N 個のフェルミオンの開放系のリュウビリアンの全体を、 N 次正方複素行列の空間に作用するアフィン変換群のリー環からの準同型として表示する。密度行列の時間発展を表す CPTP 変換は、アフィン変換群の元に対応する。これによって、アフィン変換群の代数的性質から CPTP 変換の代数的性質が導かれる。特に、アフィン変換の線形変換の部分を表現する行列の、ジョルダン標準形への変換から密度行列の時間発展の漸近挙動が得られる。

(4) N モードのボソンフォック空間に作用する、2 体非エルミート作用素の極大散逸性を伝統的な不足指数の議論から導く。この作用素によって生成される半群が不変なフレシェ空間を持つことを念頭において、そこに値をとる関数の微分積分法を用いて、所謂量子ジャンプ項を非エルミート作用素に対する摂動とした議論を行う。

4 . 研究成果

(1) マルコフ確率場は確率超過程としてミンロスの定理を通じて負定値汎関数を用いて構成されるが、その汎関数を設定する自由度がある。この自由度を用いて、この確率場によるウイルソンループの期待値がループの長さの $p(>1)$ 乗になる様にする。この確率場による積分を用いて、荷電スカラー場の伝播関数の表示が得られる。伝播関数は一般に、4 次元ユークリッド空間の 2 点を変数とする関数であるが、非線形電磁場のユークリッド的対称性により、この 2 点間の距離のみに依存する。この距離が大きいときの伝播関数の次の様な漸近挙動が得られた。伝播関数は距離の $q(p)$ 乗に比例する量を冪とする減少する指数関数で上から抑えられる。ここで $q(p)$ は $p>1$ のとき $q(p) >1$ となる関数である。この結果は、以下の物理的イメージがある。ウイルソンループの議論は、静的な 2 粒子間に働く力が 2 粒子間の距離が大きくなるにつれて非有界となるので、2 粒子は遠く離れることが出来ない。よって粒子が単独で存在するには無限大のエネルギーが伴うので、不可能であることを示唆していると解釈されている。しかし、実際に動的な粒子の運動に対する量子論的な影響は如何なるものか、その計量的表現はどうなっているかに興味に移る。我々の結果はこれに対する一つの答えである：自由粒子の伝播関数は、ユーリッド距離とその粒子の質量の積を冪として減少する指数関数となるが、上の結果は、その質量に相当するものが無限大であると読める。より詳しく述べれば、粒子の質量はその粒子の存在する(虚)時間の関数としてその時間と共に無限に増大する。このようにして、静的な性質からの推測が定量的に定式化された。

(2)減衰振動子の議論においては、密度行列の基底としてリウヴィリアンの固有ベクトルの集合を定めた。これを用いれば、平衡状態への緩和は自明となる。無限成分スピンの開放系に対しては、リウヴィリアンによる時間発展に、時間依存するスピンの遷移確率を用いる表示を与えた。それを見れば、密度行列は(トレースを保ちながら)作用素として0に強収束するという形で、状態の漸近挙動が得られる。物理的観点からより詳しく述べれば、スピンの z 成分の値の確率分布は時間と共に分散が限りなく大きくなりながら、その平均値は負の無限大に発散することが示された。上記2つの自由度の結合したモデルである無限成分デイク開放系においては、CPTP 変換によって分離された2つの自由度:スピンの衣を纏った振動子(着衣振動子)と振動子の衣を纏ったスピン(着衣スピン)の時間発展は既に見た減衰振動子と無限成分スピンの開放系の挙動に帰着する。ここで、着衣振動子の平衡状態への緩和した後の(正確には十分平衡状態に近づいたときの)振動子の角振動数は無限成分スピンのそれと同じ場合の挙動に一致する(近づく)という意味で、同期することが示された。

(3)ゲージ不変2体相互作用する N フェルミオン系の GKSLD 型開放モデルにおけるリュウビリアン全体に N 次正方複素行列の空間に作用するアフィン変換群のリー環の表現としての構造を与えた。これを用いて、リュウビリアンの別のリュウビリアンを生成元とする変換による相似変換の法則を導いた。密度行列全体を含むトレースクラスの空間の基底で、リュウビリアンの作用が見やすいものを構成した。ガウス状態(準平衡状態)はガウス状態という性質を伴ったまま時間発展することが示され、その具体的公式が得られた。1次元格子系の表皮効果をこの立場から説明した。ゲージ不変でない2体相互作用する N フェルミオン開放系、2体相互作用する N ボソン開放系に対しても、同様なアフィン変換群との関連があることを紹介した。

(4) N モードのボソンフォック空間 F に作用する、GKSLD 型の開放系の理論のリュウビリアンの主要項として現れる2体非エルミート作用素は縮小強連続半群を生成し、さらにそれは個数作用素の任意冪の定義域を不変にすることが示された。この縮小半群とボソンの生成作用素の冪の積として得られる有界作用素を用いた相似変換の和としてクラウド型の、密度行列(F 上のトレースクラス作用素)に作用する半群が得られるが、その生成元が与えられたリュウビリアンに一致するように出来ることが示された。この様にして、2体相互作用する N ボソン系の熱浴中の状態の発展を表すマスター方程式の解は、完全正かつトレースを保存する強連続半群によって記述されることが示され、開放系の量子統計力学のモデルとして期待される性質を持つことが結論される。

< 引用文献 >

Gorini V, Kossakowski A and Sudarshan E C G, Completely positive dynamical semigroups of N -level systems, J. Math. Phys., Vol.17 (1976) 821-825

Lindblad G, On the generator of quantum dynamical semigroups, Commun. Math. Phys.,

Vol.48 (1976) 119-130

Davies E B, Quantum theory of open systems, (London: Academic Press, 1976)

Tamura H, On the possibility of confinement caused by nonlinear electromagnetic interaction, J. Math. Phys. , Vol.32 (1991), 897-904

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Albeverio Sergio, Tamura Hiroshi	4. 巻 59
2. 論文標題 Asymptotics of the evolution semigroup associated with a scalar field in the presence of a non-linear electromagnetic field	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1063/1.4996880	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kyokawa Ryota, Moriya Hajime, Tamura Hiroshi	4. 巻 27
2. 論文標題 On the Open Dicke-Type Model Generated by an Infinite-Component Vector Spin	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Open Systems & Information Dynamics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S1230161220500122	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計0件

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>Tamura Hiroshi: Open Quadratic Fermion Systems and Algebras of Affine Transformations (http://arxiv.org/pdf/2301.06069)</p> <p>雑誌論文 2 (https://arxiv.org/pdf/2003.02262)</p>
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	ザグレブノフ (Zagrebnovalentin A.)	マルセイユ数学研究所	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Kanazawa symposium on quantum dynamical systems and related topics	開催年 2019年～2019年
--	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ドイツ	Bonn 大学			
フランス	Aix-Marseille 大学			