

令和 4 年 5 月 17 日現在

機関番号：13601

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2021

課題番号：17K05274

研究課題名（和文）量子ウォークの同値性に関する研究

研究課題名（英文）Equivalence relations of quantum walks

研究代表者

大野 博道（Ohno, Hiromichi）

信州大学・学術研究院工学系・准教授

研究者番号：90554585

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,500,000円

研究成果の概要（和文）：量子ウォークは光子や電子といった量子の動きを数学的に表すもので、量子アルゴリズムの一つである探索アルゴリズムなど応用も多い。量子ウォークにはユニタリ同値という同値性があり、ユニタリ同値である量子ウォークは同じ量子ウォークとみなすことができる。本研究では、1次元、2次元、円上の量子ウォークなど、いくつかの量子ウォークについて、ユニタリ同値となるための必要十分条件を明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ユニタリ同値である量子ウォークは、確率分布やスペクトルといった重要な性質のほとんどが一致する。そのため、量子ウォークがユニタリ同値である必要十分条件がわかると、解析すべき量子ウォークの数を減らすことができるようになる。例えば、スプリットステップ量子ウォークでは、もともと4個のパラメータが必要だったのに対し、ユニタリ同値の研究後は、2個のパラメータのみ必要であることがわかった。これにより、量子ウォークの研究をより平易に行うことができるようになった。

研究成果の概要（英文）：A quantum walk is a mathematical representation of the motion of a quantum, such as a photon or an electron, and has many applications, including search algorithms, which are one of the quantum algorithms. Quantum walks have an equivalence relation called unitary equivalence, and quantum walks that are unitary equivalence can be regarded as the same quantum walk. In this study, we clarify the necessary and sufficient conditions for unitary equivalence for several quantum walks, including one-dimensional, two-dimensional, and quantum walks on a circle.

研究分野：関数解析学

キーワード：量子ウォーク ユニタリ同値類

1. 研究開始当初の背景

量子ウォークはランダムウォークを量子化したものである。ランダムウォークは、よく酔っ払いが歩くときの様子と説明されるが、量子ウォークは、この酔っ払いが光子や電子に変わったものと説明することができる。酔っ払いが光子や電子に変わることによって、ランダムウォークを定義する上で必要だった位置や推移確率の情報に加え、スピンなどの内部自由度を表すためのヒルベルト空間が必要になる。また、光子や電子の量子状態は長さ1のベクトルで、推移確率はユニタリ作用素で表されることになる。量子ウォークの研究の一つの大きな目的は、ランダムウォークの場合と同様に、量子状態の確率分布を調べ、その再帰確率や、極限における確率分布などを明らかにすることである。

量子ウォークの研究は2000年頃から盛んになり、多くの量子ウォークのモデルについて研究がなされた。2002年には、Konnoにより1次元量子ウォークの極限における確率分布が明らかになり、その後、量子ウォークの様々なモデルについて、同様の解析が行われた。また、量子ウォークは、量子アルゴリズム、特にグローバラーのアルゴリズムと呼ばれる探索アルゴリズムと非常に強い関連性がある。2004年には、Szegedyにより量子ウォークを用いた探索アルゴリズムが紹介された。この中で用いられた量子ウォークはセゲディウォークと呼ばれており、このセゲディウォークについても、様々なモデルで研究がなされ、多くの結果が出されていた。

一方で、複数の量子ウォークの関係性についての研究は非常に少なかった。量子ウォークの関係性、特に同値性の研究は、量子ウォークの分類の研究ともいえるものであり、数学的な視点からみればとても重要なものであるが、これに関する研究はほとんどなされていなかった。この関係性についてなされた数少ない研究の1つにユニタリ同値性があり、2015年には、シフト不変な1次元量子ウォークが1つのパラメータにより記述できるということが示されていた。本研究を開始した時、1次元量子ウォークがセゲディウォークとユニタリ同値になる必要十分条件は得ていたが、その他の量子ウォークのユニタリ同値性については全く手がついていない状況であった。

2. 研究の目的

ユニタリ同値な量子ウォークは、研究対象になるほとんどの性質が一致することが知られており、ユニタリ同値な量子ウォークは「同じ」と言ってよい。そのため、量子ウォークを研究する際に、全ての量子ウォークを研究するのではなく、ユニタリ同値類の代表元のみを調べれば十分である。つまり、ユニタリ同値類が明らかになれば、研究対象とすべき量子ウォークの数を大きく減らすことができ、今後の量子ウォークの研究をより平易に行うことが可能になるのである。

本研究では、2つの量子ウォークがユニタリ同値になるための必要十分条件や、ユニタリ同値類がどのような集合になるかを明らかにすることが目的であった。上述のように、1次元量子ウォークについてはすでにいくつかの研究がなされていたが、多次元量子ウォーク、円上の量子ウォーク、スプリットステップ量子ウォークなど、手がつけられていない量子ウォークについて、ユニタリ同値となるための必要十分条件やユニタリ同値類を求め、量子ウォークの研究をより平易に行えるようにすることが本研究の目的であった。

3. 研究の方法

量子ウォークを考えると、重要な要素が4つある。1つ目は、光子や電子といった量子の位置を表すグラフ、2つ目は、量子の内部自由度を表すヒルベルト空間の次元、3つ目は推移確率を表すユニタリ作用素、4つ目は初期状態である。これまでの量子ウォークの研究の中で、最も多く研究されている1次元量子ウォークは、グラフが整数の集合 \mathbb{Z} 、ヒルベルト空間の次元が2のものである。この条件のもとで、さらにユニタリ作用素や初期状態に具体的な数値を与えれば、具体的な量子ウォークが得られる。

これまでの研究の多くは、この具体的な量子ウォークの解析を行うものであった。一方で、ユニタリ同値性を研究する際には、グラフとヒルベルト空間の次元を固定して、そこで考える全ての量子ウォークを扱う必要がある。また、ユニタリ同値性の研究では、グラフとヒルベルト空間の次元を変えることに、取り扱う量子ウォークの集合が変わるため、まず、グラフとヒルベルト空間の次元を決めなければならない。

研究は、すでに解析が行われている1次元量子ウォークから始め、その後、多次元やより一般のグラフへと拡張していった。また、その重要性からスプリットステップ量子ウォークについても研究を行った。グラフの頂点とヒルベルト空間の次元を決め、さらに頂点間の有向辺の数をユニタリ作用素の階数で定義することで対象とする量子ウォークを定め、その構造を明らかにしてからユニタリ同値類を求めるやり方を用いた。

本研究ではユニタリ同値類を求めることを目的としていたが、そのためには量子ウォーク全体を把握する必要があり、いくつかの量子ウォークについては再定義を行う必要があった。この再定義を行うと、既存の量子ウォークを全て含むクラスを考えることができるが、量子ウォーク

が具体的な形で表されないため、まずはその構造を明らかにする必要があった。この量子ウォークの構造は、ユニタリ同値類を求める中で出てきた副産物であったが、それ自体が重要な研究結果であると考えている。

ユニタリ同値類を求める方法は、1次元で使った方法を用いたが、全ての拡張において、全く同じに行うことはできず、グラフやユニタリ作用素の特殊性を考慮しながら、その特徴に合わせた計算方法を見つけていく必要があった。また、それらの特殊性から出た結果の差異についても考察が必要であった。

4. 研究成果

(1) 1次元量子ウォークのユニタリ同値類

まず、1次元量子ウォークのユニタリ同値類の計算を行った。1次元量子ウォークは、量子ウォークの中でも最も多く研究されているもので、重要度も高い。この計算を行った結果、一般的な1次元量子ウォークのユニタリ同値類を決定することができた。また、1次元量子ウォークの特別なクラスについてユニタリ同値類を計算し、シフト不変量子ウォークはパラメータ1つ、1つの特異点を含む量子ウォークはパラメータ4つ、2相量子ウォークはパラメータ4つ、1つの特異点を含む2相量子ウォークはパラメータ6つを用いたユニタリ同値類で表されることを明らかにした。このことから、1次元量子ウォークのユニタリ同値類には、おおよそ各頂点に対して2つのパラメータが必要であることがわかった。この研究内容は、“Unitary equivalence classes of one-dimensional quantum walks II” というタイトルで、Quantum Inf. Process.に掲載された。

(2) シフト不変な2次元2状態量子ウォークのユニタリ同値類

次に、シフト不変な2次元2状態量子ウォークのユニタリ同値類の計算を行った。2次元2状態の量子ウォークのユニタリ同値類の計算では、1次元のときのやり方が通用しなかったため、これまでになかった新しい計算方法を模索した。具体的には、量子状態を表すヒルベルト空間の正規直交基底を、量子ウォークが最も簡単に表せるように選ぶことで、まずその構造を明らかにし、そこで求めた表現をもとにしてユニタリ同値類を計算した。結果として、2次元2状態量子ウォークのユニタリ同値類は、2つの実パラメータを用いて表せることがわかった。シフト不変な1次元2状態量子ウォークが1つの実パラメータを用いて表せることから、 n 次元2状態量子ウォークのユニタリ同値類は n 個の実パラメータを用いて表されることが予想される。この研究結果は、“Parameterization of translation-invariant two-dimensional two-state quantum walks” というタイトルで、Acta Math. Vietnam.に掲載された。

(3) 円上の量子ウォークのユニタリ同値類

次に、円上の量子ウォークのユニタリ同値類の計算を行った。1次元量子ウォークと同様に、おおよそ1つの頂点に対して2つのパラメータが必要になるという結果が得られた。一方で、円上の量子ウォークのユニタリ同値類は、これまで分かっている量子ウォークと異なり、動く範囲が頂点の個数 N に依存して変化するパラメータがあることがわかった。この範囲は N を無限大に近づけると消え、その結果出てくるものが1次元量子ウォークと酷似しているため、ある意味では円上の量子ウォークの極限が1次元量子ウォークと捉えることもできると考えられた。さらに、 N が偶数か奇数かによってもパラメータの動く範囲が異なることもわかり、これまでの研究結果には無い円特有の性質を得ることができた。なお、偶数か奇数かによってパラメータの範囲が変わる理由は、量子ウォークが直和分解できるかどうかに関連していると予測している。この研究結果は、“Parameterization of quantum walks on cycles” というタイトルで、Quantum Inf. Process.に掲載された。

(4) スプリットステップ量子ウォークのユニタリ同値類

最後に、スプリットステップ量子ウォークのユニタリ同値類を求めた。スプリットステップ量子ウォークは、今後その拡張が扱われる可能性があったため、既存のものに加え、拡張したものも含まれるように再定義を行った。この再定義の方法だと量子ウォークをパラメータを用いて具体的に表すことが難しいため、まずその構造を明らかにし、その上でそのユニタリ同値類を明らかにした。この構造を明らかにする手法は、2次元量子ウォークのときに用いた手法と似ている部分があった。結果として、スプリットステップ量子ウォークのユニタリ同値類は、1つの頂点に対しておおよそ4つのパラメータが必要になることがわかった。スプリットステップ量子ウォークは1次元量子ウォークを2つ重ねたものとみることのできるため、1次元量子ウォークに必要なパラメータの個数の2倍になるという結果も納得できるものであった。また、Suzukiによって定義されていた、カイラル対称性をもつスプリットステップ量子ウォークのユニタリ同値類についても計算を行った。それにより、それまでは4つのパラメータが必要であったものが、2つのパラメータのみ必要であることがわかった。この研究結果は、“Unitary equivalence classes of split-step quantum walks” というタイトルで、Quantum Inf. Process.に掲載された。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Narimatsu Akihiro, Ohno Hiromichi, Wada Kazuyuki	4. 巻 20
2. 論文標題 Unitary equivalence classes of split-step quantum walks	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Quantum Information Processing	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11128-021-03323-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kuriki Shuji, Nirjhor Md Sams Afif, Ohno Hiromichi	4. 巻 20
2. 論文標題 Parameterization of quantum walks on cycles	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Quantum Information Processing	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11128-020-02950-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Ohno Hiromichi	4. 巻 43
2. 論文標題 Parameterization of Translation-Invariant Two-Dimensional Two-State Quantum Walks	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Acta Mathematica Vietnamica	6. 最初と最後の頁 737 ~ 747
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40306-018-0278-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Ohno Hiromichi	4. 巻 16
2. 論文標題 Unitary equivalence classes of one-dimensional quantum walks II	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Quantum Information Processing	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11128-017-1741-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Matsuzawa Yasumichi, Ohno Hiromichi, Suzuki Akito, Tsurii Tatsuya, Yamanaka Satoe	4. 巻 16
2. 論文標題 Non-commutative hypergroup of order five	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Algebra and Its Applications	6. 最初と最後の頁 1750127 ~ 1750127
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0219498817501274	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 大野博道、成松明廣、M.S.A.Nirjhor、和田和幸
2. 発表標題 円上の量子ウォークとスプリットステップ量子ウォークのユニタリ同値類
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 大野博道
2. 発表標題 Unitary equivalence classes of quantum walks
3. 学会等名 Workshop on " Non-commutative Probability and Related Fields "
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 大野博道
2. 発表標題 2次元2状態量子ウォークのユニタリ同値類
3. 学会等名 2019年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 大野博道
2. 発表標題 量子ウォークのユニタリ同値類
3. 学会等名 信州数理物理サマースクール ” 量子ウォークにおける対称性とトポロジー ”
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 大野博道
2. 発表標題 量子ウォークと量子マルコフ連鎖
3. 学会等名 第8回信州関数解析シンポジウム
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiromichi Ohno
2. 発表標題 Unitary equivalence classes of one-dimensional quantum walks
3. 学会等名 2018 International Conference on Matrix Inequalities and Matrix Equations (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiromichi Ohno
2. 発表標題 Unitary equivalence classes of some types of quantum walks
3. 学会等名 The 7th International Conference on Matrix Analysis and Applications (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiromichi Ohno
2. 発表標題 Unitary equivalent classes of one-dimensional quantum walks
3. 学会等名 6th International Conference on Matrix Analysis and Applications (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 大野 博道
2. 発表標題 1次元量子ウォークのユニタリ同値類
3. 学会等名 日本数学会2018年度年会
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 今野紀雄、井出勇介編著、大野博道(分担執筆)他	4. 発行年 2019年
2. 出版社 培風館	5. 総ページ数 321
3. 書名 量子ウォークの新展開 [数理構造の深化と応用]	

〔産業財産権〕

〔その他〕

SOAR 研究者総覧 http://soar-rd.shinshu-u.ac.jp/profile/ja.yFTmbpkh.html

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 The 7th International Conference on Matrix Analysis and Applications	開催年 2018年～2018年
--	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------