

令和 4 年 9 月 12 日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K05275

研究課題名(和文)無限次元代数及び場の量子論の解析とその応用

研究課題名(英文) Analysis of Infinite dimensional algebras and quantum field theories and their applications

研究代表者

栗田 英資 (Awata, Hidetoshi)

名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授

研究者番号：40314059

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：ディン・庵原・三木(DIM)代数 ( $gl(1)$  量子トロイダル代数) のインタートワイナーのブレイド関係式とシフト関係式を用い、DIM代数やその  $gl(n)$  版のR行列や (qt)-KZ方程式を導出した。DIM代数のマックマホン表現に対するインタートワイナーを構成し、対応するR行列も導出した。DIM代数のインタートワイナーを合成してつくられる演算子を2つの方向からトレースをとったものに対応する関数を提案し、それが非定常 Dell ハミルトニアン固有関数であるという予想を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ディン・庵原・三木(DIM)代数は、ホップ代数の構造と2つの中心を持つ無限次元代数であり、 $W$ 無限大代数、 $(q-)$ ピラソロ代数や $(q-)$  $W$ 代数などをその特殊な場合として内包している。又、我々が発見した様に、その関数は5次元超対称ヤンミルズ理論のネクラソフ分配関数と一致している。そのため最近非常に注目を集めている重要な代数である。

研究成果の概要(英文)：We derived the generalization of the KZ equation associated with the Ding-Iohara-Miki (DIM) algebra and its R-matrix by using the braid and shift relations of the intertwiner of the DIM algebra. We constructed the intertwiner for a MacMahon representation and show that the intertwiners are permuted using the MacMahon R-matrix. We presented a candidate for the eigenfunction of the non-stationary Dell Hamiltonian.

研究分野：無限次元可積分系

キーワード：ディン・庵原・三木代数 量子トロイダル代数 DAHA

## 1. 研究開始当初の背景

4次元超対称ヤン・ミルズ理論の分配関数に対するネクラソフ公式が、ピラソロ代数のある種の行列要素で与えられるというダビデガイオットの斬新な予想があった。我々はこのガイオット予想 (AGT 対応) を5次元に拡張し、5次元超対称ヤン・ミルズ理論の分配関数に対するネクラソフ公式が、 $q$ 変形ピラソロ代数の擬特異状態の内積で与えられるという予想を提出した [AY1, AY2]。

その後我々は、 $q$ 変形ピラソロ代数や  $q$ 変形  $W$ 代数を含むより一般的な  $gl(1)$ 量子トロイダル代数 (ディン・庵原・三木代数) の相関関数が5次元ネクラソフ公式に一致する事を証明した [AFS]。これは  $A$ 型の場合における一般の AGT 対応を証明した事を意味する。

又、 $gl(1)$ 量子トロイダル代数のインタートワイナーを合成すると、代数の遮蔽演算子が得られることも発見した [AKM<sup>40Z</sup>]。

[AY1] H. Awata, Y. Yamada, Five-dimensional AGT Conjecture and the Deformed Virasoro Algebra, JHEP 1001, 125 (2010).

[AY2] H. Awata, Y. Yamada, Five-dimensional AGT Relation and the Deformed beta-ensemble, Prog. Theor. Phys. 124 (2010) pp227--262.

[AFS] H. Awata, B. Feigin, J. Shiraishi, Quantum Algebraic Approach to Refined Topological Vertex, JHEP 1203, 041 (2012).

[AKM<sup>40Z</sup>] H. Awata, H. Kanno, T. Matsumoto, A. Moron, A. Morozov, Y. Ohkubo and Y. Zenkevich, Explicit Examples of DIM Constraints for Network Matrix Models, JHEP 1607, 103 (2016).

## 2. 研究の目的

$gl(1)$ 量子トロイダル代数 (ディン・庵原・三木代数) は、ホップ代数の構造と2つの中心を持つ無限次元代数であり、 $W$ 無限大代数、( $q$ 変形)ピラソロ代数や( $q$ 変形) $W$ 代数などをその特殊な場合として内包している。又、我々が発見した様に、その相関関数は5次元超対称ヤンミルズ理論のネクラソフ分配関数と一致している。そのため最近非常に注目を集めている重要な代数である。

そこで本研究では、量子トロイダル代数の表現論を解析し、その素粒子論や物性論などの数理物理への応用を目的とした。

## 3. 研究の方法

本研究は、素粒子論のみならず物性理論、代数学、代数幾何学等と広範な分野にまたがっているため、研究遂行には各分野の研究者との交流が不可欠である。そのため、共同研究者との綿密な議論及び研究打ち合わせを行った。

研究協力者として、共同研究者である本研究科の菅野浩明教授、東大数理科学研究科の白石潤一准教授、ランダウ研究所の Boris Feigin 教授、ITEP の Alexei Morozov 教授、Andrei Mironov 教授、Yegor Zenkevich 氏にも研究に参加して頂いた。

## 4. 研究成果

$gl(n)$ 量子トロイダル代数の部分代数の特殊な場合である  $sl(n)$ アフィン・リー代数の場合、そのインタートワイナーの交換関係は  $R$ 行列で記述され、又インタートワイナーの積の行列要素はクニズニーク・ザモロドチコフ (KZ) 方程式によって特徴づけられている。我々は  $gl(1)$ 量子トロイダル代数のインタートワイナーのブレイド関係式とシフト関係式を構成し、 $R$ 行列や KZ 方程式の拡張 ( $(qt)$ -KZ 方程式) を導出した。更にその  $gl(n)$ 量子トロイダル代数への拡張も行った。

又、ディン・庵原・三木代数のマックマホン表現を解析した。マックマホン表現は3次元ヤング図に対応しており、普通の2次元ヤング図に対応するフォック表現を特別な場合として含むより一般的な表現である。又、3方向の入れ替え対称性に由来する興味深い構造を持っている。以前栗田・フェイギン・白石が構成した  $gl(1)$ 量子トロイダル代数のインタートワイナーはフォック表現に対するものであったが、それを拡張しマックマホン表現に対するインタートワイナーを構成した。又、その交換関係から  $R$ 行列を導出した。

マクドナルド関数や5次元超対称ヤン・ミルズ理論のネクラソフ分配関数は  $gl(1)$ 量子トロイダル代数のインタートワイナーを組み合わせたウェブ図で構成できるが、ウェブ図の縦横2種

類の外線に関するトレースでそれらの楕円化を構成することができる。横もしくは縦方向のトレースで 6 次元超対称ヤンミルズ理論の分配関数や楕円ライセナスハミルトニアン固有関数、縦横両方向のトレースで 2 重楕円型 (DeII) 可積分系のハミルトニアン固有関数などが得られると期待される。ここで DeII 系は座標部分のみならず運動量部分も楕円変形した可積分系で、 $S$  双対性など豊富な対称性を持っている。

一方、野海及び白石は 2 種類ある変数の一方を特殊化するとマクドナルド多項式になるマスター関数を発見していた。更に白石はその 2 パラメータ変形 (白石関数) を定義し、その豊富な対称性の予想や、それが非定常楕円ライセナス関数であるという予想を提出していた。非定常楕円ライセナス関数とは楕円ライセナス関数の非定常化 (ハミルトニアンに時間依存性を持たせる変形) にあたる関数であり、あるパラメータを特殊化すると非定常楕円カロジェロ・サザランドハミルトニアン固有関数を与えることが予想されている。我々は  $gl(1)$  量子トロイダル代数のインタートワイナーを合成してつくられる演算子を 2 つの方向からトレースをとったものに対応する関数を提案し、それが非定常 DeII ハミルトニアンの固有関数 (白石関数の楕円類似) であるという予想を与えた。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 8件/うちオープンアクセス 8件）

1. 著者名 Awata Hidetoshi, Kanno Hiroaki, Mironov Andrei, Morozov Alexei	4. 巻 2020
2. 論文標題 On a complete solution of the quantum Dell system	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of High Energy Physics	6. 最初と最後の頁 212
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/JHEP04(2020)212	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Awata Hidetoshi, Kanno Hiroaki, Mironov Andrei, Morozov Alexei	4. 巻 80
2. 論文標題 Shiraishi functor and non-Kerov deformation of Macdonald polynomials	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 The European Physical Journal C	6. 最初と最後の頁 994
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1140/epjc/s10052-020-08540-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Awata Hidetoshi, Kanno Hiroaki, Mironov Andrei, Morozov Alexei	4. 巻 2020
2. 論文標題 Elliptic lift of the Shiraishi function as a non-stationary double-elliptic function	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of High Energy Physics	6. 最初と最後の頁 150
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/JHEP08(2020)150	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Awata Hidetoshi, Kanno Hiroaki, Mironov Andrei, Morozov Alexei, Suetake Kazuma, Zenkevich Yegor	4. 巻 2019
2. 論文標題 The MacMahon R-matrix	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of High Energy Physics	6. 最初と最後の頁 97
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/JHEP04(2019)097	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 H. Awata, H. Kanno, A.Mironov, Al. Morozov	4. 巻 B949
2. 論文標題 Can tangle calculus be applicable to hyper polynomials?	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Nuclear Physics	6. 最初と最後の頁 114816
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.nuclphysb.2019.114816	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Awata Hidetoshi, Kanno Hiroaki, Mironov Andrei, Morozov Alexei, Morozov Andrey	4. 巻 98
2. 論文標題 Nontorus link from topological vertex	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Physical Review D	6. 最初と最後の頁 46018
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevD.98.046018	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Awata Hidetoshi, Kanno Hiroaki, Mironov Andrei, Morozov Alexei, Suetake Kazuma, Zenkevich Yegor	4. 巻 2018
2. 論文標題 (q, t)-KZ equations for quantum toroidal algebra and Nekrasov partition functions on ALE spaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of High Energy Physics	6. 最初と最後の頁 192
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/JHEP03(2018)192	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Awata Hidetoshi, Kanno Hiroaki, Mironov Andrei, Morozov Alexei, Morozov Andrey, Ohkubo Yusuke, Zenkevich Yegor	4. 巻 96
2. 論文標題 Generalized Knizhnik-Zamolodchikov equation for Ding-Iohara-Miki algebra	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Physical Review D	6. 最初と最後の頁 26021
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevD.96.026021	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 6件 / うち国際学会 4件）

1. 発表者名 Awata Hidetoshi
2. 発表標題 位相的頂点と丁・庵原・三木代数 ~菅野さんと歩んで17年~
3. 学会等名 Quantum Geometry in Gauge Theory and Strings, --多元数理ウェッピナー Kanno 60--, Nov. 21, 2020 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Awata Hidetoshi
2. 発表標題 On DIM algebra and 5D AGT correspondence
3. 学会等名 "Topological Field Theories, String theory and Matrix Models - 2019", August 26-31, 2019, ITP (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Awata Hidetoshi
2. 発表標題 Quantum Toroidal algebra $gl_1$ and AGT correspondence
3. 学会等名 "Workshop New Trends in Integrable Systems 2019", September 9-20, 2019, Osaka City Univ. (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Awata Hidetoshi
2. 発表標題 On quantum toroidal algebras
3. 学会等名 Workshop and School "Topological Field Theories, String theory and Matrix Models - 2018" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hidetoshi Awata
2. 発表標題 On intertwiners of quantum toroidal $U_{\{q,d\}}(\widehat{\widehat{gl}_N})$
3. 学会等名 Workshop and School "Topological Field Theories, String theory and Matrix Models" Lebedev Physics Institute, Moscow, RUSSIA 2017, August, 25--31(August, 30) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hidetoshi Awata
2. 発表標題 Ding-庵原-三木代数の表現論
3. 学会等名 日本数学会秋季分科会特別講演, 山形大学, 2017年9月12日 (招待講演)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
				他2機関
ロシア連邦	Lebedev Physics Institute, Moscow	ITEP, Moscow	Inst. for Information Transmission Prob.	
イタリア	Universit'a di Milano-Bicocca	INFN, sezione di Milano- Bicocca		