

令和 6 年 5 月 8 日現在

機関番号：14403

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2023

課題番号：17K05278

研究課題名（和文）作用素環の近似性の研究とその応用

研究課題名（英文）Approximation property for operator algebras and its application

研究代表者

岡安 類（Okayasu, Rui）

大阪教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：70362746

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：作用素環における近似性である単射性と Haagerup 近似性の研究を行なった。Haagerup 近似性は長年、III型の von Neumann 環では定義されないままであったが、戸松氏との共同研究により、一般の von Neumann 環に導入に成功した。さらに小澤氏と戸松氏との共同研究では量子群の Haagerup 近似性との関連した問題についても解決できた。一方で、単射的因子環の分類は Connes と Haagerup によって解決された、作用素環における重要な結果であるが、与えられた因子環の型によって証明手法が異なっていたが、統一的方法による別証明を与えることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

von Neumann 環の Haagerup 近似性は有限型の場合は以前から導入されたにも関わらず、一般の場合には全くの手付かずであった。しかし近年の研究によりその重要性が改めて認識されるようになり、一般的な定義の導入が期待されていた。そこで戸松氏との共同研究により、当初の予想された困難さを回避して、簡潔な定義の導入に成功した。

研究成果の概要（英文）：We studied injectivity and Haagerup approximation, which are approximation properties in operator algebras. The Haagerup approximation property was not defined for type III von Neumann algebras for many years, but through joint work with Tomatsu, it was generalized. Moreover, in joint work with Ozawa and Tomatsu, some problems in the Haagerup approximation property of quantum groups were also resolved. We also gave an alternative proof that an injective factor on a Hilbert space with trivial bicentralizer is ITPFI.

研究分野：作用素環

キーワード：von Neumann環 因子環

1. 研究開始当初の背景

中心が自明である von Neumann 環は因子環と呼ばれる。すべての von Neumann 環は因子環の直積積分の形で表されるので、作用素環論の主な研究対象は因子環である。因子環は I 型、II 型、III 型に分類される。I 型因子環はヒルベルト空間上の有界線形作用素全体のなす環に限り、それらはヒルベルト空間の次元で完全に分類される。特にヒルベルト空間が n 次元ならば、有界線形作用素全体の環は大学初年度に学ぶ線形代数学でお馴染みの n 次正方形行列全体である。そのためもあり、作用素論では I 型因子環は自明なものとみなし、主に II 型と III 型について研究を行っている。II 型は II_1 型と II 型に細分される。III 型は III_0 型、III 型 ($0 < \lambda < 1$)、 III_1 型の 3 つに分類されると思ってよい。

1970 年代、Connes は従順な von Neumann 環の構造解析を含む一連の業績によりフィールズ賞を受賞し、作用素環論における従順性の重要性を決定づけた。Connes は II_1 型、II 型、III 型 ($0 < \lambda < 1$) の従順な因子環はそれぞれ唯一であることを証明した。これらはすべて I 型因子環の無限テンソル積 (ITPFI 因子環と呼ばれる) の形で表される。また Connes は従順な III_1 型因子環もまた唯一であることを予想した。その後、Haagerup により従順な III_1 型因子環もまた ITPFI 因子環であることが証明され、唯一性の問題は完全に解決した。Haagerup の証明において、従順な III_1 型因子環の双中心化部分代数 (bicentralizer) は自明であることが重要な役割を果たしていた。

一方で、 III_0 型因子環については、ITPFI 因子環で互いに非同型なものが非可算無限個存在し、さらに ITPFI 因子環ではない従順な因子環も存在することを注意しておく。

Connes と Haagerup の証明は、因子環が従順であることや ITPFI であることがその型とは無関係に定義されるにも関わらず、それぞれの場合に分けて考えなければならなかったことが不思議であった。

また作用素環論の重要未解決問題のひとつとして、「すべての III_1 型因子環の双中心化部分代数は自明であるか」というものがあり、双中心化部分代数の構造解析は大変重要だと考えられている。 III_1 型因子環の双中心化部分代数については、近年、盛んに研究がされるようになっているが、それ以外についてはまったく研究がなされていないのが現状である。

2. 研究の目的

研究の主目的は Connes と Haagerup による従順な因子環の唯一性に関する結果の別証明をできる限り統一的に与えることである。また、von Neumann 環の双中心化部分代数の構造を調べることも目標とする。

3. 研究の方法

研究の目的を達成するためには、多くの研究者と交流し、研究に関する議論を交わし、様々な情報を集めることが最も大切である。そのための方法として、国内外の研究集会やワークショップに積極的に参加する。他者と研究の議論を行うためには、電子メール等のやりとりだけではまったく不十分である。なぜならば電子メールのやり取りでは意思疎通の齟齬が生じかねない。そのような問題を防ぐために、電子メールを何往復もするのは効率的ではない。以上の理由から、研究集会等に参加して、参加する他の研究者と実際に対面して議論することが、最も効果的かつ効率的な研究手法である。

そのために毎年春・秋に行われる日本数学会や京都大学数理解析研究所研究会の共同研究、毎年秋に行われる作用素論・作用素環論研究集会に積極的に参加し、他の参加者との交流をはかり、研究を進めていく。

4. 研究成果

従順な III_1 型因子環における Haagerup の唯一性の証明で重要な役割を果たしたのが、双中心化部分代数が自明であることである。しかし、実際には Connes の証明においても双中心化部分代数が自明であることは重要であることに気がついた。したがって、「双中心化部分代数が自明である」という仮定の下で従順な因子環が ITPFI 因子環であることを証明した。証明の基本的な方針は Haagerup のものを踏襲し、合わせて Almost unitarily equivalence と stable invariant state という新たな概念を導入することで成功した。これにより Connes と Haagerup の証明のように場合分けをできる限り排除した証明を与えることができた。

一方で、従順な III_0 型因子環はただひとつではないため、双中心化部分代数が非自明であることもあわせて確かめた。これは一部の専門家の間ではよく信じられていた事実だと思われるが、実際に証明された文献は存在しなかったため、ここで確かめた意義はある。また重要未解決問題で

ある「すべての III_1 型因子環の双中心化部分代数は自明であるか」という問題に関連して、双中心化部分代数の自身を研究することは大変重要なものと考えられる。その意味で、 III_0 型因子環の双中心化部分代数が非自明であることの証明は、この方面の研究の第一歩になる結果だと考えている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Rui Okayasu	4. 巻 -
2. 論文標題 A note on injectivite factors with trivial bicentralizer	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Norio Nawata	4. 巻 118
2. 論文標題 Trace scaling automorphisms of the stabilized Razak-Jacelon algebra	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 545-576
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1112/plms.12195	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Okayasu Rui, Ozawa Narutaka, Tomatsu Reiji	4. 巻 121
2. 論文標題 Haagerup approximation property via bimodules	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 MATHEMATICA SCANDINAVICA	6. 最初と最後の頁 75~91
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.7146/math.scand.a-25970	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 0件/うち国際学会 0件）

1. 発表者名 Rui Okayasu
2. 発表標題 Injectivite factors with trivial bicentralizer
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担 者	縄田 紀夫 (Nawata Norio) (90614040)	大阪大学・大学院情報科学研究科・准教授 (14401)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------