

令和 5 年 6 月 8 日現在

機関番号：17701

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2022

課題番号：17K05281

研究課題名（和文）組合せ論と表現論に基づく、ランダム分割とランダム行列の研究

研究課題名（英文）Study on random partitions and random matrices based on combinatorics and representation theory

研究代表者

松本 詔（Matsumoto, Sho）

鹿児島大学・理工学域理学系・准教授

研究者番号：60547553

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,000,000円

研究成果の概要（和文）：ランダム行列、特にWeingarten calculusに関する研究として、テンソル積上の一様分布するランダム・エルミート行列に対して、その部分トレースの分布を調べた。ランダム分割に関して、対称群の正規化スピン既約指標のKerov多項式表示やStanley指標公式を求め、それを用いたランダム・シフトヤング図形の大数の法則や中心極限定理を得ることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ランダム行列論はその名の通りランダムに振る舞う行列の集団を扱う分野で、数理物理学や量子情報理論を始め広い範囲に応用されている。また、その離散への類似物として、整数の分割をランダムに扱う、ランダム分割の研究がある。本研究はこれらについて具体的で視覚的に分かりやすい結果を得た。

研究成果の概要（英文）：As a study on random matrices, especially on the Weingarten calculus, we have investigated the distribution of its partial traces for uniformly distributed random Hermitian matrices on tensor products. For random partitions, we have obtained Kerov polynomial representations and Stanley character formulas for the normalized spin irreducible characters of the symmetric group, and used them to obtain the law of large numbers and the central limit theorem for random shifted Young diagrams.

研究分野：表現論

キーワード：対称群 ヤング図形 既約指標 ランダム行列 Weingarten calculus

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

本研究はランダム分割およびランダム行列に関する研究を目標としている。研究代表者は本研究開始以前もこれらの問題に取り組んでいた。

- (1) ランダム行列。研究代表者はランダム行列の行列成分の分布を調べる Weingarten calculus について研究していた。ユニタリ群を含むコンパクト・リー群や、コンパクト対称空間に付随するランダム行列の Weingarten calculus は既に完成していた。特に後者は研究代表者による研究結果である。そしてこれらの結果の様々な分野への応用が期待されていた。
- (2) ランダム分割。整数分割上の確率測度は、しばしば対称群の複素線形表現に深く関連づけられる。その際、正規化既約指標の代数的な構造、より詳しくは Kerov 多項式や次数に関する評価などがランダム分割の漸近的な振る舞いを決定する。一方、対称群の射影表現 (スピン表現) に関連するランダム分割の研究は、ほとんど行われていなかった。

2. 研究の目的

本研究はランダム分割およびランダム行列に関する研究を目標としている。まず、対称群のスピン表現に由来するシフト・プランシェレル測度を扱い、極限定理や組合せ論的な表示を中心とした新しい性質を発見する。可能であれば、同様のことを、調和解析に由来する Jack 測度についても行う。また、Weingarten calculus を利用して、様々なランダム行列のモーメントの計算を実行し、それらの数理論理学、とりわけ量子情報理論への応用を考える。

3. 研究の方法

- (1) Weingarten calculus は、行列積分を対称群上の関数を用いて記述する。これまでの研究を見直し、計算が簡略化できる箇所を見つける。また、量子情報理論ではランダム行列を用いたアプローチがあるので、Weingarten calculus を用いて新しい発見がないか模索する。
- (2) プランシェレル測度を始めとする分割の上の測度は、対称群の正規化既約指標の性質を調べることが重要であった。例えば、Kerov 多項式や Stanley の指標公式などの表示が重要である。シフト・プランシェレル測度を研究するにあたり、対応するスピン正規化既約指標に同様の表示式があるかどうか模索する。

4. 研究成果

次の (1) (2) はランダム行列に関する成果で、(3) (4) (5) (6) はランダム分割に関する成果である。

- (1) Weingarten calculus の入門的文書。過去の共同研究者とともに、Weingarten calculus に関する短い入門文書を発表した。Weingarten calculus の基本定理、ユニタリ群の場合、直交群や斜交群の場合、量子群の場合と、短い文書ながら多くのものがまとめられ、入門には最適な文書となった。これまでの Weingarten calculus の理論が整理され、多くの研究者に読まれることが期待される。
- (2) Quantum marginal problem への Weingarten calculus の応用。本研究は研究期間の終盤に実施された。量子情報理論における次のような問題を考察している。量子系の合成系はヒルベルト空間のテンソル積で表現される。テンソル積に作用するエルミート行列は、合成系の状態に対応する。本研究では、テンソル積に作用する一様分布するランダム・エルミート行列に対して、部分系への制限、すなわち部分トレースを考え、その分布について調べた。具体的には、部分トレースの行列成分のモーメントを計算した。これは Weingarten calculus によって計算される。計算できることは理論的には明らかだが、整理された形になるかどうかは未知数である。実際、テンソル積ではうまく計算できたが、ボゾンやフェルミオンの場合を同様にやると、整理された形にはできないことが分かった。
- (3) スピン Kerov 多項式の発見。対称群の正規化既約指標を、分割から決まる自由キウムラントの多項式として表したものを、Kerov 多項式という。これは 2000 年頃に Kerov により提示された。既約指標は表現論で中心的な役割を果たす一方、分割のサイズが大きいときの一般的かつ明示的な表示は知られていない。分割のサイズが十分大きいときは確率論を用いた考え方が必要であるが、その際に必要となるのがまさに自由キウムラントである。これは分割から定まる Kerov 推移測度のモーメントと双対な概念である。Kerov 多項式により既約指標の確率論的な取り扱いが大幅に進展した。本研究では、Kerov 多項式のスピン表現版を提示した。対称群は通常表現の他に、射影表現から導かれるスピン表現と呼ばれるものが知られている。スピン表現の理論は、通常表現のものよりもやや難しく取り扱いが難しいが、通常表現と似た理論が構成できることが知られている。今回の研究では、まさに Kerov 多項式のスピン表現への類似物をどう定義すればいいか

という問いに一つの答えを与えた。通常の表現のときと同様に、Kerov 推移測度の自由キウムラントを考えたいところだが、スピン表現ではシフト・ヤング図形を扱うのでそのままではうまくいかない。そこで、ダブル・ヤング図形を用いた。さらに、対応する自由キウムラントは代数的独立性が保たれないという困難があったが、それを偶数次のみを扱うようにすることで問題を回避できた。今回構成した「スピン Kerov 多項式」は係数が非負整数であることが低次の計算で確認できた。この性質は一般に成り立つことが自然に予想されるが、研究期間終了時現在でも未解決問題である。

- (4) Stanley 指標公式のスピン版の発見。上述のように、対称群のスピン表現の理論は、通常表現と似た理論が構成できる。すなわち「平行」な関係にあるといえよう。本研究では、通常表現とスピン表現の「橋渡し」を構成することができた。これは従来「平行」と捉えられていた見方と比較すると、直接的な関係は驚くべきものである。すなわち、通常表現の既約指標をスピン表現の既約指標を用いて明示的に表すこと、そしてその逆もできることを示した。また、その主結果を用いて、通常指標の Stanley 指標公式のスピン版を構成することができた。これによりスピン指標はさらに分かりやすい表示が可能となり、以下の(5)のスピン表現に対応するランダム分割の漸近挙動の研究につながった。また、スピン版の Stanley 指標公式も、通常の Stanley 指標公式と同様に、マップ(2次元閉曲面の上のグラフ)を用いて記述できることが確認された。
- (5) ランダム・シフトヤング図形の極限定理。分割(ヤング図形)の上の測度として、プランシェレル測度が代表的である。これは対称群の正則表現の既約分解から自然に定めることができる。一般に、対称群の表現があれば、既約分解を考えることで、自然に確率測度が定められる。プランシェレル測度の次に代表的なものは、対称群のテンソル積表現の Schur-Weyl 双対性から定まる Schur-Weyl 測度である。これら2つの測度に対応するランダムヤング図形の研究は多く行われてきていた。特に対称群の次数 n を無限大にするときの、ヤング図形の極限形状は重要な問題である。本研究は、これらの射影版を扱うことである。すなわち、スピン対称群の正則表現やスピン版の Schur-Weyl 双対性に付随するランダム・シフトヤング図形の極限形状を求めた。代数的に必要な道具は上記の(4)で大半が準備できており、解析に必要な道具は通常の Schur-Weyl 測度の研究で既に構成されていたので、大部分はそれらの組合せである。スピン版の Schur-Weyl 測度の極限形状は、対応する自由キウムラントで特徴付けられたが、明示的な表示を得ることはできなかった。これは自由確率論において、一般に自由キウムラントから対応する測度を復元することが難しいという一般的な事実によるものである。
- (6) 長方形ヤング図形に対応する、正規化指標の新しい表示。上記の(3)から(5)はスピン表現に関する研究であるが、(6)は主に通常の線形表現に対する研究である。正規化指標は、共役類に対応するヤング図形 μ と、既約表現に対応するヤング図形 λ により決まる。上記の Kerov 多項式は、主に μ が1行ヤング図形の時を考えている。また、Stanley の指標公式は一般の μ で記述されるが、特に μ が長方形ヤング図形の時の方が分かりやすい。これら2つの表示は、前者は一般的な記述が困難であること、後者は項の数が多すぎるのが欠点であった。そこで我々は第3の表示式を発見した。ただし、一般的な場合ではなく、 μ が1行ヤング図形、 λ が長方形 $p \times q$ のときに限る。得られた式は、 p と q の差 $q-p$ が小さい場合は特に簡単な表示になるような表示式である。特別な場合に限ってはいるが、これまでにない表示式であり、しかもある程度因数分解された多項式の形であり、明瞭である。今後の応用が期待される。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計12件（うち査読付論文 9件 / うち国際共著 6件 / うちオープンアクセス 9件）

1. 著者名 S. Matsumoto, C. McSwiggen	4. 巻 -
2. 論文標題 Moments of random quantum marginals via Weingarten calculus	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 S. Matsumoto, P. Sniady	4. 巻 5
2. 論文標題 Symmetric group characters of almost square shape	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Algebraic Combinatorics	6. 最初と最後の頁 771--784
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/alco.247	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 B. Collins, S. Matsumoto, J. Novak	4. 巻 69
2. 論文標題 The Weingarten Calculus	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Notices of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 734--745
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/noti2474	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 松本詔	4. 巻 2216
2. 論文標題 長方形ヤング図形に対応する対称群指標の新しい表示	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 64--81
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 松本詔	4. 巻 2161
2. 論文標題 対称群のスピン表現に対するStanley指標公式	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 58-72
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 S. Matsumoto, P. Sniady	4. 巻 3
2. 論文標題 Linear versus spin: representation theory of the symmetric groups	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Algebraic Combinatorics	6. 最初と最後の頁 249--280
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/alco.92	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 S. Matsumoto, P. Sniady	4. 巻 26
2. 論文標題 Random strict partitions and random shifted tableaux	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Selecta Mathematica	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 松本詔	4. 巻 2127
2. 論文標題 対称群のスピン表現に対するKerov多項式	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 50-65
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Sho Matsumoto	4. 巻 14
2. 論文標題 A Spin Analogue of Kerov Polynomials	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications	6. 最初と最後の頁 53
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3842/SIGMA.2018.053	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Sho Matsumoto and Jonathan Novak	4. 巻 25
2. 論文標題 A moment method for invariant ensembles	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Electronic Research Announcements	6. 最初と最後の頁 60--71
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/era.2018.25.007	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Sho Matsumoto	4. 巻 24
2. 論文標題 Polynomiality of shifted Plancherel averages and content evaluations	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Annales Mathematiques Blaise Pascal	6. 最初と最後の頁 55-82
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/ambp.364	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Benoit Collins and Sho Matsumoto	4. 巻 14
2. 論文標題 Weingarten calculus via orthogonality relations: new applications	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.	6. 最初と最後の頁 631-656
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計14件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 4件）

1. 発表者名 S. Matsumoto
2. 発表標題 Moments of partial traces for random Hermitian matrices and Weingarten calculus
3. 学会等名 Seminar Bielefeld - Melbourne Random Matrices (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 松本詔
2. 発表標題 対称群の正規化指標に関する幾つかの結果とスピン類似
3. 学会等名 Non-Commutative Probability and Related Topics 2022
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 松本詔
2. 発表標題 長方形ヤング図形に対応する対称群指標の新しい表示
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型)「組合せ論的表現論および関連分野との連携」
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 松本詔
2. 発表標題 対称群のスピン指標のStanley指標公式
3. 学会等名 JCCA2020-DMIA2020-SGT9
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 松本 詔
2. 発表標題 ほぼ正方形のヤング図形に対応する対称群の正規化指標
3. 学会等名 第2回 分布族・離散集合の幾何学とその周辺
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 松本 詔
2. 発表標題 Kerov多項式とStanley指標公式
3. 学会等名 可換確率論と非可換確率論の相互作用準備会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Sho Matsumoto
2. 発表標題 Kerov polynomials and Stanley formulas for spin symmetric groups
3. 学会等名 Interactions between commutative and non-commutative probability (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松本 詔
2. 発表標題 対称群のStanley指標公式とmapの数え上げ
3. 学会等名 Study Meeting on Graph and Curvature
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松本 詔
2. 発表標題 対称群のスピンの表現に対するStanley指標公式
3. 学会等名 RIMS共同研究（公開型）「表現論とその組合せの側面」
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Sho Matsumoto
2. 発表標題 Weingarten calculus and counting paths on Weingarten graphs
3. 学会等名 Random matrices and their applications（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 松本 詔
2. 発表標題 直交群の Weingarten calculus と Weingarten グラフ
3. 学会等名 2018年度（第57回）実函数論・函数解析学合同シンポジウム
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 松本 詔
2. 発表標題 対称群のスピンの表現に対するKerov多項式
3. 学会等名 RIMS共同研究（公開型）「組合せ的表現論の諸相」
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Sho Matsumoto
2. 発表標題 Weingarten calculus for random matrices associated with the compact symmetric space of class D III
3. 学会等名 Workshop on "Random Matrices and Related Topics" (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松本詔
2. 発表標題 Weingarten calculus for Haar distributed matrices and Wishart matrices
3. 学会等名 確率・統計・行列ワークショップ松本2017
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>松本詔のホームページ https://sites.google.com/site/shomatsumotomath1/home</p>
--

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ポーランド	ポーランド科学アカデミー			
米国	カリフォルニア大学サンディエゴ校			