

令和 3 年 6 月 10 日現在

機関番号：32644

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K05283

研究課題名(和文) 高次元非双曲微分同相写像系の非自明遊走集合の存在とそのヒストリック性

研究課題名(英文) Historic behavior of wandering domains for high dimensional dynamics

研究代表者

桐木 紳 (Kiriki, Shin)

東海大学・理学部・教授

研究者番号：50277232

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目標は「ヘテロ次元サイクルをもつような3次元以上の任意次元微分同相写像は、非自明遊走領域をもつような微分同相写像で  $C^1$  近似でき、またそれはヒストリックな振舞いを持つ微分同相写像で  $C^1$  近似できる」ことを証明することであった。これに対してほぼ満足のいく解答を得た。具体的には、3次元以上の任意の次元で、ヘテロ次元的(インデックスの異なる周期点をもつ)ホモクリニック・クラスをもつような微分同相写像がヒストリックな振舞いをもつことは  $C^1$  位相において通有的にであることを証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は『Takensの最終問題』として知られる公開問題を解くために多くの情報を与えている。『Takensの最終問題』とは「ヒストリックな振舞いを持つ軌道の初期点集合がルベグ測度正であるような微分同相写像が持続的に存在するか?」というものである。これに対して我々は2017年にNewhouse領域に属する任意の2次元微分同相写像は、Takensの最終問題に対し肯定的な性質をもつ微分同相写像で  $C^r$  近傍(ただし  $r$  は2以上かつ無限大未満)できることをしめした。これは2次元に限った結果であったが、本研究の成果は3次元以上のヒストリックな振舞いの存在を示したという点で力学的にとっても重要な結果である。

研究成果の概要(英文)：Results were obtained that largely satisfied the original research objectives. Specifically, we have succeeded to show that  $C^1$ -generically for diffeomorphisms of manifolds of dimension  $d$  at least 3, a homoclinic class containing saddles of different indices has a residual subset where the orbit of any point has historic behaviour. The results were published in one of the leading journals of the American Mathematical Society.

研究分野：力学系

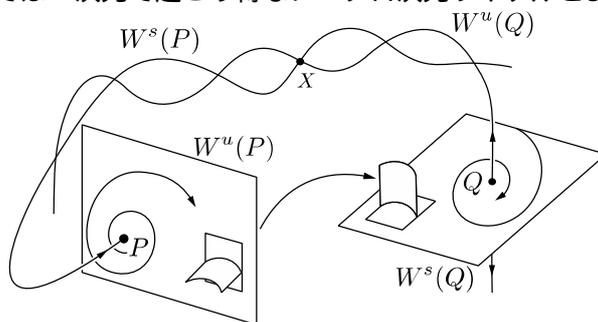
キーワード：力学系 微分同相写像 ヒストリー性 非双曲性 ホモクリニック接触 ヘテロ次元サイクル

### 1. 研究開始当初の背景

Poincaré から始まる力学系研究の枠組みには, Smale が提唱した解の挙動を幾何学的側面から解明していくものと Birkhoff が提唱した解の挙動に伴う平均値等を測度論的側面から解明していくものがある. 一方で Birkhoff 平均がないような挙動はあまり扱われてこなかったのが現実である. しかし我々は 2 次元非双曲的写像系の近くには非自明遊走集合をもつものが存在し, その軌道が Birkhoff 平均を持たないことを明らかにした. 本研究の主目的は 3 次元以上の力学系で非自明遊走集合の存在と Birkhoff 平均を持たない, すなわちヒストリックな振舞いをする解の存在を明らかにし, Smale の方向性を広げ Birkhoff の先にある複雑な力学系へ研究の枠組みを拡げることにある.

### 2. 研究の目的

この研究以前の成果に含まれる 2 次元非双曲的な微分同相写像系に関する結果の証明は 2 次元であることに依存していた. ゆえに 3 次元以上の非双曲的の微分同相写像系に対して『非自明遊走領域を持つ微分同相写像で  $C^1$  近似可能か?』さらに『ヒストリックな振舞いを持つ軌道は存在するか?』という自然な問題が生まれる. これらの解は 2 次元の単なる類似的な議論から得られない. その理由は, 3 次元以上の力学系では 2 次元で起こり得ないヘテロ次元サイクルとよばれる非双曲的な現象が一般的に存在するからである. ここで微分同相写像がヘテロ次元サイクルを持つとは, 図 3 のようにインデックスが異なるサドル周期点  $P$  と  $Q$  の間に, 安定多様体と不安定多様体からなるサイクルが存在する状況のことである. 定義よりこのサイクルは 2 次元以下では起こりえない. 定義された空間の次元とサドル周期点のインデックスの関係からヘテロ次元サイクルは必然的に  $X \in W^s(P) \cap W^u(Q)$  のような非横断的交差を含む. これは摂動に弱いように見える. しかし Bonatti と Díaz は  $P$  と  $Q$  のインデックスの差が 1 ならばヘテロ次元サイクルを持つ写像の  $C^1$  近傍に頑丈なヘテロ次元サイクルを持つ微分同相写像が存在することを示した. また Bonatti-Díaz と申請者はこの頑丈なヘテロ次元サイクルが元のサイクルの  $P$  と  $Q$  とホモクリニック関係にあるための十分条件を明らかにした. つまりヘテロ次元サイクルを持つ写像は  $C^1$  微分同相写像の空間で開集合として存在するという意味で一般的なのである. このような対象に対し本研究で証明したい主張は次の 2 つである.



【主張 1】ヘテロ次元サイクルをもつような任意の  $n (\geq 3)$  次元微分同相写像は, 非自明遊走領域をもつような微分同相写像で  $C^1$  近似できる.

【主張 2】またそれはヒストリックな振舞いを持つ微分同相写像で  $C^1$  近似できる.

【主張 1】ヘテロ次元サイクルをもつような任意の  $n (\geq 3)$  次元微分同相写像は, 非自明遊走領域をもつような微分同相写像で  $C^1$  近似できる.

【主張 2】またそれはヒストリックな振舞いを持つ微分同相写像で  $C^1$  近似できる.

### 3. 研究の方法

本研究の主要テーマは, 3 次元以上の非双曲的力学系における (i) 非自明遊走領域の存在と (ii) ヒストリックな振舞いをする軌道の存在を証明することであり, 桐木紳(研究代表者, 東海大学)・相馬輝彦(研究分担者, 首都大)・中野雄史(研究分担者, 北見工大)・小川竜(研究分担者, 東海大学)で行う共同研究である. 具体的にはヘテロ次元サイクルを持つ微分同相写像を対象に最初の 2 年間は (i) に関して集中して研究し成果をあげた後, 残りの 2 年間で (ii) に関して研究する予定である. 本研究の滞りない遂行のために研究協力者である E. Colli 氏・E. Vargas 氏(Univ. San Paulo, ブラジル)と議論を進めることが不可欠である.

### 4. 研究成果

#### (1) 非双曲ホモクリニック・クラスにおけるヒストリックな振舞いの存在

この成果においては 3 次元以上の任意の次元で, ヘテロ次元的(インデックスの異なる周期点をもつ)ホモクリニック・クラスをもつ  $C^1$  位相で通有的な微分同相写像がヒストリックな振舞いをもつことを証明した. すなわち【主張 1】と【主張 2】の解を与えることに成功した. この成果は, 論文[1]として出版した.

[1] P.G.Barrientos, S.Kiriki, Y.Nakano, A.Raibekas and T. Soma, Historic behavior in nonhyperbolic homoclinic classes, *Proc. Amer. Math. Soc.* 148 (2020), 1195-1206

## (2) 非自励縮小写像のヒストリックな振舞いについて

この成果は本研究から派生したものである。軌道がヒストリックな振舞いを起こす初期点の集合のルベーク測度は 0 なるものと、絶対連続かつ独立同分布のノイズをもつ写像を使い、ルベーク測度正の初期点に対する軌道がヒストリックな振舞いを起こすような例を構成した。この成果は、論文[2]として出版した。

[2] S. Kiriki, Y. Nakano and T. Soma, Historic behaviour for nonautonomous contraction mappings, *Nonlinearity*, 32-3 (2019), 1111-1124

## (3) サドル焦点をもつ 3 次元微分同相写像のモジュライについて

この成果は本研究から派生したものである。3 次元微分同相写像のサドル不動点が一対の複素固有値をもち、それに関するホモクリニック接触を有するようなものは、その不動点の固有値がモジュライとなり線形等角写像によって一意的に定まることを示した。この成果は論文[3]として出版した。

[3] S. Hashimoto, S. Kiriki, and T. Soma, Moduli of 3-dimensional diffeomorphisms with saddle-foci, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 38-10 (2018) 5021-5037

## (4) ヘテロ次元サイクルの非自明遊走領域の存在

3 次元微分同相写像で複素固有値をもつが共にインデックスの異なる一対のサドル周期点の間にサイクルがある様な場合、その  $C^1$  近傍には不変円をもつ微分同相写像が存在することを証明し、それから Denjoy 的手法で非自明遊走領域をもつ微分同相写像を作ること成功した。この成果は論文[4]として出版した。

[4] S. Kiriki, Y. Nakano and T. Soma, Non-trivial wandering domains for heterodimensional cycles, *Nonlinearity*, 30-8 (2017) 3255-3270

## (5) Takens の最終問題の解

Takens の最終問題とは「ヒストリックな振舞いを持つ軌道の初期点集合がルベーク測度正であるような微分同相写像が持続的に存在するか？」というものである。これに対して Newhouse 領域に属する任意の 2 次元微分同相写像は、Takens の最終問題に対し肯定的な性質をもつ微分同相写像で  $C^r$  近傍 ( $2 \leq r < \infty$ ) であることをしめした。この成果は論文[5]として出版した。

[5] S. Kiriki and T. Soma, Takens' last problem and existence of non-trivial wandering domains, *Adv. Math.* 306 (2017), 524-588.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Pablo G. Barrientos, Shin Kiriki, Yushi Nakano, Artem Raibekas, Teruhiko Soma	4. 巻 148
2. 論文標題 Historic behavior in nonhyperbolic homoclinic classes	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1195 ~ 1206
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/proc/14809	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Shin Kiriki, Yushi Nakano, Soma Teruhiko	4. 巻 32
2. 論文標題 Historic behaviour for nonautonomous contraction mappings	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Nonlinearity	6. 最初と最後の頁 1111 ~ 1124
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/proc/14809	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Shinobu Hashimoto, Shin Kiriki, Teruhiko Soma	4. 巻 38
2. 論文標題 Moduli of 3-dimensional diffeomorphisms with saddle-foci	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Discrete & Continuous Dynamical Systems - A	6. 最初と最後の頁 5021 ~ 5037
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/dcds.2018220	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Shin Kiriki, Yushi Nakano, Teruhiko Soma	4. 巻 30
2. 論文標題 Non-trivial wandering domains for heterodimensional cycles	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Nonlinearity	6. 最初と最後の頁 3255 ~ 3270
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1361-6544/aa7cc6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shin Kirik, Teruhiko Soma	4. 巻 306
2. 論文標題 Takens' last problem and existence of non-trivial wandering domains	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 524--588
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2016.10.019	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 桐木 紳
2. 発表標題 Historic behavior in non-hyperbolic homoclinic classes
3. 学会等名 2019年度 冬の力学系研究集会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 桐木 紳
2. 発表標題 Historic behavior for heterodimensional cycles
3. 学会等名 冬の力学系研究集会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shin KIRIKI
2. 発表標題 Robust historic behavior of generic orbits for heterodimensional cycles
3. 学会等名 One day Workshop of Dynamical Systems in Suzhou (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shin Kiriki
2. 発表標題 C <sup>2</sup> -robust heterodimensional tangencies of codimension 2
3. 学会等名 2017年度 冬の力学系研究集会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shin Kiriki
2. 発表標題 Historic Behavior for Non-trivial Wandering Domains
3. 学会等名 2017 NCTS Workshop on Dynamical Systems
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Alfred S. Posamentier、Stephen Krulik、桐木 由美、桐木 紳	4. 発行年 2017年
2. 出版社 共立出版	5. 総ページ数 208
3. 書名 数学の問題を うまく きれいに解く秘訣	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担者	相馬 輝彦  (Soma Teruhiko)  (50154688)	東京都立大学・理学研究科・教授    (22604)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	中野 雄史  (Nakano Yushi)  (50778313)	東海大学・理学部・講師    (32644)	
研究分担者	小川 竜  (Ogawa Noboru)  (90759143)	東海大学・理学部・講師    (32644)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
ブラジル	University Federal Fluminense		