様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　　６ 年　　６ 月　　６ 日現在

機関番号：３４３１５
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2017～2023
課題番号：１７Ｋ０５２８６

研究課題名（和文）作用素関数の総合的研究

研究課題名（英文）Comprehensive Research of Operator Functions

研究代表者
内山　充（Uchiyama, Mitsuru）

立命館大学・総合科学技術研究機構・プロジェクト研究員

研究者番号：６０１１２２７３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：f(t) が区間 J で定義された連続関数、s を J の点とするとき、f(t) が作用素単調関数であるための必要十分条件は Loewner 関数 が作用素強凸関数であることを示した。 正の実軸全体で定義された関数が作用素単調であるための必要十分条件が作用素凹であることは知られていたが、それは有限区間で定義された関数には成立しない。区間が有限であるか無限であるかに関係なく関数が作用素単調であるための必要十分条件を得た。
実数の2次方程式の根と係数の関係が、幾何平均の概念を用いることによって、作用素の2次方程式でも成立することを示した。無限次元空間における3個以上の作用素の平均を確立した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
我々が示した定理「f(t) が作用素単調関数であるための必要十分条件はLoewner 関数が作用素強凸である」は逐次的に作用素単調関数を構成できることを示している。具体的な関数が作用素単調であることを確かめることは平易ではないことを考慮すれば、この結果は重要であると思われる。
作用素の2次方程式の根と係数の関係を解明したが、この結果が高次方程式の研究につながることが期待される。作用素の平均理論が空間の次元に関係なく確立されたので、幅広い分野で応用されることを期待している。

研究成果の概要（英文）：Let f(t) be a continuous function defined on an interval J, and s a point in J. Then we showed that f(t) is operator monotone if and only if its Loewner kernel function is strongly operator convex. It is well-known that if f(t) is defined on the real positive axis, then f(t) is operator monotone if and only if f(t) is operator concave. However, that does not hold for a function defined on a finite interval. We got a necessary and sufficient condition for f(t), whose domain may be finite, to be operator monotone.
By using the concept of geometric mean, we showed that the relationship between roots and coefficients of a scalar quadratic equation holds for an operator Quadratic equation as well. We established operator means of multivariable operators on an infinite dimensional space.

研究分野：関数解析

キーワード：Operator function　Operator monotone　 Operator convex function　Matrix mean　Matrix geometric mean　Matrix symmetric mean　 Loewner's theorem

１．研究開始当初の背景
実数値連続関数 f(t) が実軸の区間 J で定義されているとき、J にスペクトルを持つ全ての有界自己共役作用素(あるいはエルミート行列) X について f(X) が定義される。この作用素関数が

$$A \le B \Rightarrow f(A) \le f(B) \qquad ①$$

を満たすとき、f(t) は作用素単調関数と呼ばれる。具体的な関数が作用素単調であることをこの定義から判定することは容易ではないが、$\sqrt{t}$ が (0, ∞) における作用素単調関数であることは比較的容易に示される。A, B の算術平均 (A+B)/2 を便宜上 A∇B と書く。全ての A, B について

$$g(A \nabla B) \le g(A) \nabla g(B) \qquad ②$$

が成立するとき、g(t) は作用素凸関数と呼ばれる。作用素凹関数とはこの逆不等式が成立するときである。f(t) が微分可能であるとき、

$$K_f(t, s) = (f(t) - f(s)) / (t - s), \qquad K_f(t, t) = f'(t) \qquad ③$$

によって $K_f(t, s)$ を定める。Lӧwner (Loewner) は「f(t) が作用素単調関数であるための必要十分条件は J の任意の点 $t_1,\dots,t_n$ に対して、 $K_f(t_i, t_j)$ を (i , j) 成分とする n 次行列が半正定値である」ことを示した。Loewner は更に「f(t) が作用素単調であるための必要十分条件は、f(t) が複素平面の上半平面 に正則拡大を持ち、その値も上半平面にある」ことを示した。この定理によって関数の作用素単調性を関数論的に判定できる。例えば、tan t が (-π/2, π/2) で ① を満たすことを示す事は困難であるが､Loewner の定理を用いて作用素単調であることが分かる。他方で、Bendat – Kraus – Sherman は「g(t) が作用素凸関数であるための必要十分条件は全ての J の点 s について ③ で定義された $K_g(t, s)$ が t の関数として作用素単調である」ことを示していた。この十分条件については全ての点 s ではなく 1 点の s で良いことを私が 2010 年に PAMS から出版された論文の中で示していた。後にこれらの結果はまとめられて B. Simon(2019, Springer) の本では Bendat – Kraus – Sherman – Uchiyama の定理として紹介されている。Loewner の定理と Herglotz の定理を組み合わせると、作用素単調関数は積分で表現できる。このことを使うと、(0, ∞) で f(t)≥0 であるとき、

$$f(t) \text{ が作用素単調関数} \Leftrightarrow f(t) \text{ は作用素凹関数} \qquad ④$$

これは大変便利な定理ではあるが、tan t 等有限区間での作用素単調関数には適用できない。
行列あるいは自己共役作用素 A, B がともに正定値である時、$A \,!\, B = 2(A^{-1} + B^{-1})^{-1}$ を A, B の調和平均と呼ぶ。幾何平均 A#B はブロック行列の正値性で定義されるが、2 次方程式 $B = X A^{-1} X$ の解 $A^{1/2} (A^{-1/2} B A^{-1/2})^{1/2} A^{1/2}$ に一致する。このとき、

$$A \,!\, B \le A\#B \le A\nabla B$$

が成立する。kubo-Ando によって、一般の作用素平均が作用素単調関数 f を用いて $A^{1/2} f(A^{-1/2} B A^{-1/2}) A^{1/2}$ によって定義された。3 個以上の行列の幾何平均の定義については、幸崎氏等によりなされていたが、Ando-Li-Mathias によって、2 個の幾何平均を巡回的に構成しその極限として定義された。そして Palfia あるいは Uchiyama によって、一般の対称的な平均に拡張された。しかし無限次元空間における 3 個以上の自己共役作用素の平均をどのように定義できるかについては全く未知であった。

２．研究の目的
上記のように、g(t) が区間 J で作用素凸関数である時、s を固定すれば $K_g(t, s)$ が t の関数として作用素単調になる。しかし、作用素単調関数 f(t) については s を固定した時に $K_f(t, s)$ がどのような関数になるかについては不明であった。これを解明することが第一の目的であった。
無限区間(0, ∞) で f(t)≥0 である時、④が成立する事は知られているが、有限区間で定義された関数については成立しない。例えば、tan t は (0, π/2) で作用素単調であるが、凹関数ではない。有限区間で定義された関数についても同様な特徴付けができるであろうか？区間が有限か無限かに関係なく作用素単調関数を特徴づけることが第 2 の目的であった。
作用素 A, B の幾何平均 A#B が 2 次方程式の解になっていることを上に説明したが、「実数の 2 次方程式の根と係数の関係が行列（作用素）についても成立するか？」を研究することが第 3 の目的であった。
3 個以上の行列の幾何平均の定義は Ando-Li-Mathias によってなされ, その定義が一般の対称的平均にも適用できることが Palfia, Uchiyama によって示されているが、それらの証明は全て、有限次元空間におけるコンパクト性を使っている。従って、それらの証明はどれも無限次元空間の作用素の平均の構築には通用しない。無限次元空間における作用素の平均を数学的に確立する事が第 4 の目的であった。

３．研究の方法
膨大な過去・現在の研究結果を専門書・論文によって学び、その着想・手法を理解して研究目

的を達成する事が基本的な方法である。国内外の研究集会に出席して成果を発表する事、あるいは他の研究者と意見交換する事は、研究意欲を高め研究を持続するために必要不可欠である。その為、コロナ禍前は国内外の研究集会に参加した。
強作用素凸関数の概念を導入していた Purdue 大学 Brown 教授から preprint が送られてきた。それを下敷きにして不等式を用いて強作用素凸関数の概念を精密にした。更に、f(t) が作用素単調関数であるとき、$K_f(t, s)$ は、t の関数として強作用素凸関数になる事が解明できた。このようにして第 1 の研究目的を達成した。この結果は、Bendat – Kraus – Sherman – Uchiyama の定理と組み合わせると、一つの作用素凸関数から順次作用素単調関数を構築できることになる。
無限区間(0, ∞) で定義された f(t)≥ 0 が作用素単調関数である事と作用素凹関数である事は同値であった。即ち、作用素単調関数は算術平均を用いて特徴付けられた。関数 f(t) の定義域が有限であるか無限であるかにかかわらず特徴付ける試みは極めて自然である。この問いに正面から向き合うことは困難であったが、上記の強作用素凸関数を研究する中で、偶然その特徴付けに成功した。実際、それは調和平均を用いることによってなされた。かくして、第 2 の目的は偶然果たされた。
2 次方程式の根と係数の関係は、中学校数学でも学ぶように、数学の基本的定理である。これと類似の定理を非可換である行列や作用素について求める事が第 3 の目的であった。勿論、行列の方程式については多くの文献が出版されていたので、それらを読み解くことから始めた。近年の作用素不等式論・平均理論が展開される前の文献が主であったが、研究の一助になった。
第 4 の目的は無限次元空間における多数の自己共役作用素の平均を構築することであった。そのために、内積についての不等式を導入した。また、空間のコンパクト性の代わりに無限次元空間特有の弱収束の概念を用いた。こうして、無限次元空間における多変数の平均を確立する事に成功した。

４．研究成果

第一の研究目的については次の成果を得た。
「f(t) を区間 J で定義された連続関数、s を J の任意の点とするとき、
f(t) が作用素単調 ⇔ $K_f(t, s)$ が t の関数として作用素強凸関数。」
この定理の系として、tan t /t は (-π/2, π/2) で作用素強凸関数であることが分かる。この関数は Simon 氏が言っているように、作用素凸関数であることさえ不明であった。この定理において $g(t) = K_f(t, s)$ と置けば、任意の点 a に対して、Bendat – Kraus – Sherman の定理から $K_g(t, a)$ が作用素単調関数になる。このようにして一つの作用素単調関数が与えられたならば、逐次、作用素単調関数を構成できる。この結果は Brown 氏との共著論文として 2018 年に Linear Alg. Appl. から出版された。
第 2 の研究目的のためにまず次の定理を得た。
「g(t) が作用素強凸関数 ⇔ g(t)>0, 全ての A, B について $g(A \nabla B) \le g(A) ! g(B)$ 」
$g(A) ! g(B) \le g(A) \nabla g(B)$ であるから、この関数 g(t) は ② を満たす作用素凸関数より強い関数であることが一目瞭然であり、上記の不等式を作用素強凸関数の定義式とみなすことができる。更に、この結果を参考にして第 2 の目的である次の定理を得た。
「正の実軸内の区間(有限か無限かは問わない)で定義された関数 f(t) が作用素単調であるための必要十分条件は 全ての A, B について $f(A ! B) \le f(A) \nabla f(B)$ が成立する。」
第 3 の研究目的に関連した成果は次のとおりである。
行列 A, B が $A \ge B \ge 0$ である時、方程式

$$A = X \nabla Y, \quad B = X \# Y, \quad X \le Y$$

は唯一の解

$$Y = A + (A-B) \# (A+B), \quad X = A - (A-B) \# (A+B) \qquad ⑤$$

を持つ。この方程式から条件 $X \le Y$ を除外した解の組 (X , Y) を⑤を用いて表すことが可能であり、それらは全て 2 次方程式

$$X A^{-1} X - 2 X + B A^{-1} B = 0$$

の解になっている。
第 4 の研究目的に関連した結果は次のとおりである。
A, B, C を無限次元空間における半正定値自己共役作用素とする。$A_1 = B \# C$, $B_1 = C \# A$, $C_1 = A \# B$, と定め、同様に帰納的に順次 An, Bn, Cn を定める。内積についての不等式を導入し、それを用いて列 {An}, {Bn}, {Cn} は共通の作用素 に弱収束することを示した。その極限を S と置けば、(An + Bn + Cn) /3 は S に強収束する。極限 S が A, B, C の幾何平均と呼ばれるに相応しい 10 個の性質を示した。これらの性質を使って、4 個の作用素の平均へと拡張できる。この結果は Symmetric Operator Means として纏められて、Acta Sci. Math. (Szeged, Hungary) の平均理論特集号に掲載される。論文では、幾何平均を一般化した対称的な平均について証明されている。また、幾何平均が算術平均の定数倍になる場合を決定している。

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計8件（うち査読付論文　8件／うち国際共著　1件／うちオープンアクセス　0件）

1．著者名 Mitsuru Uchiyama	4．巻 -
2．論文標題 Symmetric operator means	5．発行年 2024年
3．雑誌名 Acta Scientiarum Mathematicarum	6．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s44146-024-00141-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Mitsuru Uchiyama	4．巻 656
2．論文標題 Symmetric matrix means	5．発行年 2023年
3．雑誌名 Linear Algebra and its Applications	6．最初と最後の頁 112 - 130
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.laa.2022.09.023	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 内山　充	4．巻 74
2．論文標題 B. Simon: Loewner's Theorem on Monotone Matrix Functions	5．発行年 2022年
3．雑誌名 数学　（日本数学会）　岩波書店発売	6．最初と最後の頁 91- 95
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 M. Uchiyama	4．巻 609
2．論文標題 Operator means and matrix quadratic equations	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Linear Algebra and its Applications	6．最初と最後の頁 163 - 175
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.laa.2020.09.004	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名	4．巻
M. Uchiyama	148
2．論文標題	**5．発行年**
Operator functions and the operator harmonic mean	2020年
3．雑誌名	**6．最初と最後の頁**
Proceeding of the American Math. Soc.	797 - 809
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	**査読の有無**
10.1090/proc/14753	有
オープンアクセス	**国際共著**
オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	－

1．著者名	4．巻
M. Uchiyama	-
2．論文標題	**5．発行年**
Some results on matrix means	2020年
3．雑誌名	**6．最初と最後の頁**
Advances in Operator Theory	-
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	**査読の有無**
10.1007/s43036-019-00036-7	有
オープンアクセス	**国際共著**
オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	－

1．著者名	4．巻
L. G. Brown, M. Uchiyama	553
2．論文標題	**5．発行年**
Some results on strongly operator convex functions and operator monotone functions	2018年
3．雑誌名	**6．最初と最後の頁**
Linear Algebra and its Applications	238 - 251
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	**査読の有無**
10.1016/j.laa.2018.05.005	有
オープンアクセス	**国際共著**
オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	該当する

1．著者名	4．巻
Mitsuru Uchiyama	449
2．論文標題	**5．発行年**
Positive linear maps on C*-algebras and rigid functions	2017年
3．雑誌名	**6．最初と最後の頁**
Journal of Mathematical Analysis and Applications	1472 - 1478
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	**査読の有無**
10.1016/j.jmaa.2016.12.069	有
オープンアクセス	**国際共著**
オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	－

〔学会発表〕　計9件（うち招待講演　1件／うち国際学会　1件）

1．発表者名 内山　充
2．発表標題 Symmetric matrix means
3．学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4．発表年 2022年

1．発表者名 内山　充
2．発表標題 Operator means and matrix quadratic equations.
3．学会等名 日本数学会（埼玉大学）
4．発表年 2022年

1．発表者名 内山　充
2．発表標題 作用素平均と行列２次方程式
3．学会等名 作用素論-作用素環論研究集会（九州大学）
4．発表年 2022年

1．発表者名 内山　充
2．発表標題 Matrix functions and Matrix means
3．学会等名 京大数理研共同研究集会「順序を用いた作用素の構造研究と関連する話題」
4．発表年 2019年

１．発表者名
内山　充

２．発表標題
Matrix functions and matrix order

３．学会等名
実解析学シンポジウム2019

４．発表年
2019年

１．発表者名
内山　充

２．発表標題
Operator functions and operator means

３．学会等名
日本数学会

４．発表年
2020年

１．発表者名
Mitsuru Uchiyama,　L.G. Brown

２．発表標題
Strongly operator convex functions

３．学会等名
日本数学会

４．発表年
2018年

１．発表者名
内山　充

２．発表標題
Strongly operator convex functions

３．学会等名
作用素論・作用素環論研究集会（招待講演）

４．発表年
2018年

１．発表者名 Mitsuru Uchiyama
２．発表標題 Positive linear maps on C*-algebras- Choi's conjecture-
３．学会等名 Positivity IX（国際学会）
４．発表年 2017年

〔図書〕　計1件

１．著者名 M. S. Moslehian (Editor) , Mitsuru Uchiyama	４．発行年 2023年
２．出版社 Springer	５．総ページ数 765
３．書名 Matrix and Operator Equations and Applications	

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
USA	Purdue University			