

令和 2 年 6 月 5 日現在

機関番号：13801

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K05294

研究課題名(和文) 制約条件を伴った準線形偏微分方程式の適切性の研究

研究課題名(英文) Studies on well-posedness for quasilinear partial differential equations with constraints

研究代表者

松本 敏隆 (Matsumoto, Toshitaka)

静岡大学・理学部・教授

研究者番号：20229561

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：バナッハ空間における抽象準線形発展作用素の生成作用素が時間に依存する場合を考察し、生成作用素が時間に関して強可測となる場合に、発展方程式の強解の時間局所存在、時間大域存在、一意性を証明した。強退化放物型方程式において変数係数の場合並びに非局所量に関して連立した系を考察し、エントロピー解の一意性と時間大域的挙動に関する結果を得た。結晶粒界現象を記述するモデルに関して、解の平滑化効果、エネルギー消散性、時間大域的挙動、一意性に関する結果を得た。変異方程式の可解性に関する基本的な結果を拡張し、envelopeの理論を距離空間におけるLipschitz半群族の場合へと拡張した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

発展方程式の抽象理論は、具体的な偏微分方程式の適切性の研究にある程度統一的手法を与える道具の一つであるため、幅広く応用可能な理論を構築することは重要である。強退化放物型並びに結晶粒界モデルの研究は、具体的ないくつかの問題に関連するものであり、数値シミュレーションの信頼性の観点からも数学的な解析は不可欠である。変異方程式は比較的新しい手法であり、今後の研究の進展によって今まで取り扱いが困難であった問題への応用が期待されている。

研究成果の概要(英文)：Abstract Cauchy problems for quasilinear evolution equations in Banach spaces are considered. We study the case where the infinitesimal generator depends on time variable. Under the assumption that the infinitesimal generator is strongly measurable with respect to time, we obtain time local existence and uniqueness, and time global existence and uniqueness results of strong solutions in time. Unique existence results and asymptotic behavior for entropy solutions to strongly degenerate parabolic equations with variable coefficients, and for entropy solutions to strongly degenerate parabolic systems with non-local terms are obtained. Phase field models related to grain boundary motions are considered as well. Uniqueness, smoothing effects, dissipativity of energy and asymptotic behavior of solutions are investigated. Finally, we extend the results of solvability for mutational equations and the theory of envelopes of nonlinear semigroups.

研究分野：実解析学

キーワード：発展作用素 安定性条件 強退化放物型 適切性 変異方程式

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

制約条件を伴った偏微分方程式の初期・境界値問題は、積空間における抽象発展方程式の初期値問題に書き直すことができる。このアプローチの特徴は、抽象発展方程式に現れる生成作用素の定義域が稠密にならない点にある。生成作用素が時間に依存しない半線形問題については、解を考えるバナッハ空間が非回帰的な場合は、積分化半群の理論による取り扱いが可能であり、個体群動態モデル等へ応用されてきた。2009年に Magal-Ruan によって解を考えるバナッハ空間が回帰的な場合への拡張が行われ、その結果は個体群動態モデル等へ応用されている。生成作用素が時間に依存しない準線形問題については、解を考えるバナッハ空間が非回帰的な場合に、従来の Kato 理論を拡張することによって、研究代表者と研究協力者による共同研究で連続的微分可能な解の一意存在が示された。しかしながら、バナッハ空間が回帰的な場合については未解決のままであった。

### 2. 研究の目的

偏微分方程式の初期・境界値問題を考える上で、解を考えるバナッハ空間が回帰的な場合を扱うことが出来ないのは、一般的なツールを与える抽象発展方程式の理論としては不完全であるため、この不完全さを改善することを目的とした。空間が回帰的な場合、生成作用素のレゾルベントに対する従来の安定性条件と、生成作用素の定義域が稠密でないことは両立しないことが知られている。生成作用素が時間に依存しない線形作用素の場合は、Magal-Ruan による安定性条件が知られているため、これを参考にして生成作用素が時間依存する場合や準線形作用素の場合に、新しい安定性条件を確立して発展作用素の生成理論を得ることを目指した。また、空間拡散の効果を加えたサイズ構造モデルのような準線形問題では、連続的微分可能な解よりも弱解を考える必要があるため、弱解を扱うように解作用素を与えるリプシッツ発展作用素の生成理論の整備も目的とした。

### 3. 研究の方法

(1) 生成作用素の安定性条件の研究では、生成作用素が時間に依存する場合に、Magal-Ruan, Bobrowski の先行研究に倣ってラプラス変換を用いた定式化を考察した。但し、先行研究とは異なり時間依存の場合は多重ラプラス変換を用いる必要があり、このことにより解析の困難さが増大した。

(2) 変数係数を持つ強退化放物型方程式の研究では、エントロピー解の存在、一意性を示すために粘性消滅法と Kurzkov の二重変数法を組み合わせる手法を用いた。特殊解の構成を行うことによって解の漸近挙動を得た。また、エントロピー解の初期値と係数に関する連続的依存性を示すために Chen-Karlsen の計算手法を用いた。

(3) 結晶粒界を記述する方程式の研究では、解のエネルギー消散性を示すために時間離散化法を用いた近似問題と汎函数の収束を用いた。

(4) 距離空間における常微分方程式である変異方程式(mutational equations)の研究では、初期値問題の適切性を示すために擬距離に関する準消散性を新しく導入した。

### 4. 研究成果

(1) 研究代表者と研究協力者らは、バナッハ空間における抽象準線形発展方程式の初期値問題に関して、生成作用素が時間依存で時間に関して強可測である場合を考察した。強解の時間局所存在、時間大域存在、並びに近似定理を証明し、得られた結果を抽象キルヒホッフ方程式へ応用した。生成作用素が時間依存かつ準線形で時間に関して強可測の場合については先行研究がなく、具体的な偏微分方程式への応用の観点からも意義ある結果と思われる。現在結果をまとめた論文を作成中である。

(2) 研究代表者は、回帰的空間において生成作用素が時間に依存する場合にレゾルベントに関する安定性条件の研究を行い、サイズ構造モデルを基にして Magal-Ruan の安定性条件の一般化に当たるものを見出した。Magal-Ruan は、生成作用素が時間に依存しない線形作用素の場合を考察しているため、単独のラプラス変換を用いてレゾルベントの安定性条件を与えているが、生成作用素が時間に依存する場合は、多重ラプラス変換を用いることになるため、具体的な問題に適用可能な安定性条件を見出すことの困難さは大幅に増加する。回帰的空間における初期・境界値問題に適用可能な発展作用素の理論を構築することは応用上も重要であり、今後は他のモデル方程式も考慮しつつ、安定性条件の改良と生成作用素が準線形となる場合への拡張を行い、発展作用素の生成理論の確立を目指して研究を続けてゆく。

(3) 研究分担者の渡邊は、非線形移流項と非線形拡散項の両方を含む強退化放物型方程式を考察した。この方程式の特徴は、放物型方程式の性質と双曲型方程式の性質の両方を持つことである。この研究では特に変数係数である場合を扱い、Wu-Zhao によって導出された条件に加えて、粘性消滅法と Kurzkov の二重変数法を用いてエントロピー解の一意存在を証明した。また、初期

値と係数に関する解の連続的依存性も証明した。いくつかの手法をうまく組み合わせることで、変数係数であることの困難さを克服しており、変数係数を扱う際の手法としても興味深い。さらに、非局所量に関して連立している系についても考察を行い、エントロピー解の一意存在を示した。この方程式(方程式系)はダム問題、ステファン問題、微粒子懸濁液の沈殿・硬化過程を記述する数学モデル、レーザーによる金属板切断過程、交通流など幅広い問題にも関係するため、エントロピー解に関する適切性の結果は応用上も基本的かつ重要なものである。この方面の今後の研究が期待される。

(4) 研究分担者の渡邊は、強退化放物型方程式のエントロピー解の時間大域的挙動を調べるために衝撃波型の特殊解を構成した。この特殊解は不連続点を高々1点持ち、衝撃波と粘性衝撃波を組み合わせた形状をしている。この特殊解を用いることによって、エントロピー解の弱い意味での漸近挙動に関する結果を得た。さらにエントロピー解の台の伝播速度に対する上からの評価も得た。(3)で述べた結果を補完するものであり、エントロピー解の性質に関する重要な情報を与えるものである。

(5) 研究分担者の渡邊らは、結晶粒界現象を記述する数学モデルを考察し、時間離散化と収束を用いて解の平滑化効果とエネルギー消散性を示し、解の時間大域的挙動を得た。また、1次元の場合に物理的意味があると思われる解のクラスを導入し、このクラスにおける解の一意性を証明した。結晶粒界現象の数学解析には、有界変動関数の空間を用いる必要があるなど、問題特有の困難な点が多々あり、特に解の一意性に関する結果は知られていなかった。1次元の場合のみとはいえ、解の適切なクラスの導入と解の一意性の結果が得られたことの意義は大きい。欠陥のない結晶の作成は実用上重要なことであり、その研究のために用いられるモデル方程式を数学的に解析することは、数値シミュレーションの信頼性の観点からも必要不可欠で、今後さらなる進展が期待される。

(6) 研究分担者の小林は研究協力者と共に、Aubinによって始められた距離空間における常微分方程式である変異方程式の初期値問題に関する理論を整備・拡張し、Katoにより始められた準線形発展方程式へ応用できるような一意可解性の結果を得た。特に擬距離に関する準消散性の条件を導入し、劣接線条件と増大条件の下で初期値問題の適切性を示した。さらに、Lax-Richtmyerの近似定理やVan Kampenの一意性定理を、距離空間におけるリプシッツ作用素半群の場合に拡張した。また、Martinの定理を変異方程式の初期値問題の場合へと拡張し、それによって定まるリプシッツ作用素半群に対するBénilanの一意性定理を得た。これらの結果は、変異方程式の基礎理論の整備・拡張にあたるもので、変異方程式の理論で扱える具体的な偏微分方程式の範囲を広げるものである。変異方程式の理論は、既存の方法では扱えない偏微分方程式にも適用できる可能性があり、今後の研究の進展が望まれる。

(7) Pierre並びに岩宮-大春-高橋による非線形半群のenvelopeの理論は、非線形半群族の包絡線を与える作用素として発展作用素の生成を行うものである。研究分担者の小林は研究協力者と共に、これを距離空間におけるあるクラスのLipschitz作用素半群族の包絡線を与えるLipschitz発展作用素の場合へと拡張した。envelopeの理論は、半群族と発展作用素の関係を与えるものであり、変異方程式の基礎理論の整備に貢献するものである。得られた結果の具体的な偏微分方程式への応用についても検討を進めている。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 小林良和	4. 巻 -
2. 論文標題 距離空間におけるリブシツ作用素半群	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 第57回実函数論・函数解析学合同シンポジウム講演集	6. 最初と最後の頁 33-52
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Kobayashi Yoshikazu, Tanaka Naoki	4. 巻 225
2. 論文標題 Well-posedness for mutational equations under a general type of dissipativity conditions	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Israel Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1-33
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11856-018-1660-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Moll Salvador, Shirakawa Ken, Watanabe Hiroshi	4. 巻 30
2. 論文標題 Energy dissipative solutions to the Kobayashi-Warren-Carter system	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Nonlinearity	6. 最初と最後の頁 2752 ~ 2784
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1088/1361-6544/aa6eb4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Matsumoto Toshitaka, Tanaka Naoki	4. 巻 162
2. 論文標題 Abstract Cauchy problems for quasilinear operators whose domains are not necessarily dense or constant	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 91 ~ 112
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.na.2017.06.013	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Watanabe Hiroshi	4. 巻 26
2. 論文標題 Strongly degenerate parabolic equations with variable coefficients	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Adv. Math. Sci. Appl.	6. 最初と最後の頁 143 ~ 173
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Watanabe Hiroshi	4. 巻 -
2. 論文標題 Continuous dependence for BV-entropy solutions to strongly degenerate parabolic equations with variable coefficients	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Proceedings of EQUADIFF 2017	6. 最初と最後の頁 315 ~ 324
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計25件 (うち招待講演 6件 / うち国際学会 8件)

1. 発表者名 渡邊 紘
2. 発表標題 放物型・双曲型単独保存則に対する進行波の構成とエントロピー解の漸近挙動
3. 学会等名 日本数学会春季年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 白川 健、渡邊 紘
2. 発表標題 Sufficient condition for the existence of one-dimensional crystalline solution of the Kobayashi-Warren-Carter type system
3. 学会等名 日本数学会春季年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 小林良和
2. 発表標題 An approximation theorem of Lax type for evolution operators of Lipschitz operators in a metric space
3. 学会等名 International Conference on Optimization: Techniques and Applications (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Watanabe
2. 発表標題 Traveling wave solutions for parabolic-hyperbolic conservation laws
3. 学会等名 Equadiff 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 白川健、渡邊 紘
2. 発表標題 結晶粒界の1次元フェーズ・フィールドモデルにおける解の構造解析
3. 学会等名 日本数学会春季年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Watanabe
2. 発表標題 Solvability of some systems for parabolic-hyperbolic conservation laws
3. 学会等名 The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, SS89: Advances in Analysis of Mathematical Problems arising from Materials and Biological Science (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yoshikazu Kobayashi and Naoki Tanaka
2. 発表標題 Lipschitz semigroups and mutation equations in metric spaces
3. 学会等名 The Role of Metrics in the Theory of Partial Differential Equations (The MSJ-SI) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 小林良和
2. 発表標題 距離空間におけるリブシッツ作用素半群
3. 学会等名 第57回実函数論・函数解析学合同シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 渡邊 紘
2. 発表標題 非等方的拡散項を持つ非局所的放物型・双曲型保存則系の適切性
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yoshikazu Kobayashi and Naoki Tanaka
2. 発表標題 Remarks on semigroups of Lipschitz operators in a metric space
3. 学会等名 The 6th Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 渡邊 紘
2. 発表標題 双曲型単独保存則とエントロピー解
3. 学会等名 発展方程式と変分法(東北大学) (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 渡邊紘
2. 発表標題 ある退化放物型-放物型方程式系の可解性
3. 学会等名 日本数学会春季年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 渡邊紘
2. 発表標題 ある退化放物型-楕円型方程式系の可解性
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 白川健、 渡邊紘、 中屋敷亮太、 S. Moll
2. 発表標題 結晶粒界運動の数学モデルの1次元定常解の解構造
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2017年



1. 発表者名 渡邊 紘
2. 発表標題 保存則の数学
3. 学会等名 第3回数理科学夏季若手研究会 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hiroshi Watanabe
2. 発表標題 Well-posedness for some degenerate parabolic-elliptic systems
3. 学会等名 Ito Workshop on Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yoshikazu Kobayashi
2. 発表標題 Dissipative Evolution Problems in Metric Spaces
3. 学会等名 The Eighth International Conference on Differential and Functional Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hiroshi Watanabe
2. 発表標題 Well-posedness for parabolic-hyperbolic conservation laws with nonlocal coefficients
3. 学会等名 Equadiff 2017 (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 小林良和	4. 発行年 2018年
2. 出版社 中央大学工学部数学教室	5. 総ページ数 106
3. 書名 非線形半群講義(中央大学数学教室講究録 No.7)	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担者	小林 良和  (Kobayashi Yoshikazu)  (80092691)	中央大学・理工学部・共同研究員   (32641)	
研究 分担者	渡邊 紘  (Watanabe Hiroshi)  (30609912)	大分大学・理工学部・准教授   (17501)	
研究 協力者	田中 直樹  (Tanaka Naoki)  (00207119)	静岡大学・理学部・教授   (13801)	