

令和 4 年 6 月 8 日現在

機関番号：32612

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2021

課題番号：17K05300

研究課題名（和文）無限次元空間上の微分作用素の確率解析的研究

研究課題名（英文）Research on differential operators on infinite dimensional spaces via stochastic analysis

研究代表者

河備 浩司（Kawabi, Hiroshi）

慶應義塾大学・経済学部（日吉）・教授

研究者番号：80432904

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,500,000円

研究成果の概要（和文）：無限次元空間上のある微分作用素の一意性問題および対応する確率過程の構成の研究を主に行った。特に、場の量子論の $\exp(\cdot)_2$ -モデルに現れる超関数空間上のGibbs測度を可逆測度としてもつDirichlet作用素の一意性を証明し、対応する拡散過程を特異確率偏微分方程式の一意強解として特徴付けた。またベキ零被覆グラフ上の非対称ランダムウォークに対する2種類の汎関数中心極限定理を、離散幾何解析およびラフパス理論を融合することで証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

近年の特異な確率偏微分方程式の理論の進展により、無限次元空間上の確率解析と場の量子論の数学的研究の融合が進んでいるが、本研究で得られた成果は、その中でも中心的な $\exp(\cdot)_2$ -モデルの数学解析における基礎定理である。またベキ零被覆グラフ上のランダムウォークの中心極限定理に関する成果であるが、確率微分方程式の解の離散近似とも解釈できるので、確率数値解析への波及も期待できる。

研究成果の概要（英文）：I mainly studied uniqueness problems of differential operators and the corresponding stochastic dynamics on infinite dimensional spaces via stochastic analysis. In particular, I considered Dirichlet forms given by space-time quantum fields with interactions of exponential type, called $\exp(\cdot)_2$ -measure, in Euclidean QFT, and proved strong uniqueness of Dirichlet operators defined through the Dirichlet forms. I also characterized the corresponding diffusion process as a unique strong solution to a singular stochastic partial differential equation. Besides, I proved two kinds of functional central limit theorems for non-symmetric random walks on nilpotent covering graphs by combining discrete geometric analysis with rough path theory.

研究分野：数物系科学

キーワード：確率論 確率解析 確率偏微分方程式 ラフパス理論 離散幾何解析 マリアヴァン解析 Dirichlet形式

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

解析学や幾何学では、様々な局面で 2 階の微分作用素が重要な対象として登場するが、この作用素が生成する拡散半群は、Brown 運動をインプットとする確率微分方程式および確率偏微分方程式の解を用いた汎関数積分表現を持ち、この作用素の解析に確率解析の立場が重要となってくる。また確率解析的なアプローチは、状態空間が無限次元や離散的な対象でも有効に働くという利点を持ち合わせているが、近年の Hairer による正則構造理論、Gubinelli らによる擬制御解析の理論の発展により、適用範囲も大いに広がりを見せている。本研究はこの立場から、場の量子論や測度距離空間上の幾何学から派生した無限次元空間上の 2 階微分作用素、グラフ上の離散ラプラシアン、これらに対応する確率過程に対する新たな解析理論の構築を目論んで開始されたものである。

2. 研究の目的

本研究課題では、上記の状況および前研究課題「無限次元空間上の確率解析と関連する微分作用素の研究」でやり残したことも考慮し、以下の 2 つの研究を主に行なう。

(1) 場の量子論から派生した無限次元空間上の Dirichlet 作用素なる 2 階の微分作用素の一意性問題および対応する(特異性をもつ)確率偏微分方程式の研究、またこのモデルを含むような無限次元空間上の実解析(Riesz 変換の有界性、関数不等式)の基礎研究

(2) 結晶格子やベキ零被覆グラフなどの周期性を持つ無限グラフ上の非対称ランダムウォークに対する汎関数中心極限定理、局所中心極限定理の離散幾何解析的な研究、またこれを用いたラフパス理論への応用研究

3. 研究の方法

研究課題に関連する基本文献や論文を購入し、自らの手で分析し、新たな計算を行い、共同研究者と議論を行い、理解を深めていった。特に本研究は Sergio Albeverio 氏(Bonn 大)、Michael Roeckner 氏(Bielefeld 大)との共同研究も含むために、数回のドイツ出張を行った。なお 2018 年 4 月に岡山大から慶應義塾大に異動したため、それ以降は分担者の楠岡 誠一郎 氏との共同研究を進めるために岡山、京都へのお出張を定期的に行なった。

また最新の研究動向を把握し、研究に対する新たな知見を得るためには、関連分野の研究集会・セミナーに参加し、専門家と情報交換や議論を行うことも必要であるが、特に「岡山確率論セミナー」や、廣川 真男氏(広島大、現・九大)らと 2018 年 2 月に開催した「広島-岡山解析・確率論セミナー」に、他大学から講演者を招き、関連分野の情報収集を行い、中国地方の確率論研究の活性化を図った。さらに慶應義塾大に異動後は、2019 年度より「東京確率論セミナー」の開催にも関わっているが、これらのセミナーの講演者数人分の旅費を、本研究費からサポートすることができたのも大変ありがたかった。

4. 研究成果

(1) 場の量子論における $P(\cdot)_2$ 量子場の toy model として Albeverio と Hoegh-Krohn により 1970 年代に導入された $\exp(\cdot)_2$ 量子場モデルは、Berestycki, Sheffield, Vargas ら多くの欧米の研究者により近年大きな発展を見せている 2 次元量子重力理論とも深く関係することから再注目を集めている。このモデルを記述する超関数空間上の Gibbs 測度は対数凹性という非常によい性質を持っているにも関わらず、有限体積の場合ですらこれに関する確率過程量子化プログラムに現れる Dirichlet 作用素の本質的自己共役性問題については今まできちんと論じられていなかった。この問題を Albeverio, Mihalache, Roeckner の 3 氏と 2012 年頃から取り組んでいたが、指数相互作用項の中の電荷定数が所謂 L^2 -regime に入る場合に、Dirichlet 作用素の L^p での一意性(本質的自己共役性は $p=2$ の場合に相当する)を示した。また論文執筆中に、我々の手法が虚数版である sine-Gordon モデルにも適用可能であることが分かり、このモデルも取り入れるべく論文の枠組みを書き直した。コロナ禍直前のドイツ出張にて論文がまとめられ、最終的には [1] という形で出版された。

また $\exp(\cdot)_2$ 量子場モデルの場合の Dirichlet 作用素に対応する拡散過程を特異な確率偏微分方程式の観点から直接構成できないかという考察を分担者の楠岡氏および、特異確率偏微分方程式の若手の専門家の星野 壮登 氏(大阪大)と共に行い、Da Prato-Debussche のアイデアと $\exp(\cdot)_2$ 量子場モデルの非負性を組み合わせることで、 L^2 -regime の場合にこの方程式が一意的な強解を持ち、Dirichlet 形式から定まる拡散過程と一致することを示した。こ

の確率偏微分方程式の強解の構成問題は、ほぼ同時期に Garban, Gubinelli, Oh らによっても研究されており、これらの研究の流れに一定のインパクトを与えることが出来たと自負している。この研究成果は論文[3]という形で出版された。さらにこれらの研究の総説論文を[2]として出版した。

(2) 前研究課題において、石渡 聡 氏(山形大)、小谷 元子 氏(東北大)と結晶格子上的非対称ランダムウォークの長時間漸近挙動の研究を行なったが、ランダムウォークの本来の非対称性の指標である homological direction およびそれをユークリッド空間上に実現した asymptotic direction という量の違いが、結晶格子上的非対称ランダムウォークの局所中心極限定理の精密化を行う際に明確に見て取れた。またそれと同時に 2 種類の汎関数中心極限定理も証明することができた。

本研究課題では、その継続として、被覆変換群を離散ベキ零群に一般化した場合の同様な問題を石渡氏、岡山大学での指導大学院生の難波 隆弥 氏(現・静岡大)と考察し、2種類の汎関数中心極限定理を得た。先の結晶格子の場合は、asymptotic direction が 0 の場合はこれらの汎関数中心極限定理の極限として Brown 運動が現れるが、ベキ零の場合は、あるベキ零 Lie 群上の Brown 運動に非対称性を反映するドリフトのついた拡散過程が現れる。この拡散過程は rough path 理論では、磁場付き Brown ラフパスと呼ばれているものに対応し、rough path 理論の指導的研究者である T.Lyons や Friz の周辺で注目されていた対象である。我々の研究成果は、これらの研究に対して、離散幾何解析としての幾何学的意味を込めた離散近似法を提唱したとも言え、今後の数値解析への応用研究も期待できる。なお汎関数中心極限定理の証明で要となる分布の族の緊密性を示す際に、ベキ零群のステップ数が 3 以上の場合には、確率論でスタンダードな議論では計算が煩雑になりすぎる。本研究では rough path 理論の基本定理(extension theorem)の考え方を組み合わせることで、この煩雑な問題を克服し、証明の見通しを良くしたという点も新しいアイデアであると言えよう。これらの成果をまとめた論文は、最終的には[4,5]として出版された。また前研究課題から得られた研究成果を総括したものを、2019 年夏のサマースクール数理物理での 3 コマの連続講演として口頭発表した。

(3) 抽象 Wiener 空間上の(元の Wiener 測度に絶対連続な)Gauss 測度全体に Wasserstein 距離を入れた Hilbert 多様体に自然な Riemann 計量が入り、非負断面曲率をもつ無限次元 Hilbert-Riemann 多様体になることを高津 飛鳥 氏(東京都立大)との共同研究で示し、本研究課題期間中に数回の口頭発表をした。プレプリントもすでに作成したが、まだ改良の余地があると思っており、まだ磨きをかけている状態である。次年度以降には公表にこぎつきたい。

またこの無限次元多様体上に自然な Brown 運動を構成することは、今後この多様体上の確率解析、幾何解析の理論を発展させる際に必要不可欠な問題であるが、コロナ禍直前のドイツ出張で(1)の研究に関する打ち合わせを行なった際に、空いた時間に鈴木 康平 氏、Lorenzo Dello Schiavo 氏と意見交換を行い、有益なヒントを得た。次年度以降にこの方向に関する研究も進めたい。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Sergio Albeverio, Hiroshi Kawabi, Stefan-Radu Mihalache, Michael Roeckner	4. 巻 22
2. 論文標題 Strong uniqueness for Dirichlet operators related to stochastic quantization under exponential/trigonometric interactions on the two-dimensional torus	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5)	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2422/2036-2145.202105_106	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 星野 壮登, 河備 浩司, 楠岡 誠一郎	4. 巻 2177
2. 論文標題 exp() ₂ -量子場モデルの確率過程量子化と関連する話題 (1)	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 113-122
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Masato Hoshino, Hiroshi Kawabi, Seiichiro Kusuoka	4. 巻 21
2. 論文標題 Stochastic quantization associated with the exp() ² -quantum field model driven by space-time white noise on the torus	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Evolution Equations	6. 最初と最後の頁 339-375
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00028-020-00583-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Satoshi Ishiwata, Hiroshi Kawabi, Ryuya Namba	4. 巻 25
2. 論文標題 Central limit theorems for non-symmetric random walks on nilpotent covering graphs: Part I	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Electronic Journal of Probability	6. 最初と最後の頁 1-46
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1214/20-EJP486	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Satoshi Ishiwata, Hiroshi Kawabi, Ryuya Namba	4. 巻 55
2. 論文標題 Central limit theorems for non-symmetric random walks on nilpotent covering graphs: Part II	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Potential Analysis	6. 最初と最後の頁 127-166
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11118-020-09851-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 石渡聡, 河備浩司, 難波隆弥	4. 巻 2116
2. 論文標題 CLT for random walks on nilpotent covering graphs with weak asymmetry	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 10-19
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Sergio Albeverio and Seiichiro Kusuoka	4. 巻 20
2. 論文標題 The invariant measure and the flow associated to the $\wedge^4_{\{3\}}$ -quantum field model	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., Serie V	6. 最初と最後の頁 1359-1427
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2422/2036-2145.201809_008	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hiroshi Kawabi	4. 巻 229
2. 論文標題 Strong uniqueness of Dirichlet operators related to stochastic quantization under exponential interactions in one-dimensional infinite volume	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Stochastic Partial Differential Equations and Related Fields, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics	6. 最初と最後の頁 475-485
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-319-74929-7_31	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計16件(うち招待講演 14件/うち国際学会 11件)

1. 発表者名 Hiroshi Kawabi
2. 発表標題 Functional central limit theorems for non-symmetric random walks on nilpotent covering graphs
3. 学会等名 International Conference: Pathwise Stochastic Analysis and Applications (CIRM, Marseille) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 河備 浩司
2. 発表標題 Uniqueness of Dirichlet forms related to stochastic quantization under exponential/trigonometric interactions on the two-dimensional torus
3. 学会等名 日本数学会2020年度秋季総合分科会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 河備 浩司
2. 発表標題 Central limit theorems for non-symmetric random walks on nilpotent covering graphs
3. 学会等名 慶應数理談話会(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Kawabi
2. 発表標題 Central limit theorems for non-symmetric random walks on nilpotent covering graphs
3. 学会等名 New trends in Hamilton-Jacobi: PDE, Control, Dynamical Systems and Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 河備 浩司
2. 発表標題 確率論から見た離散幾何解析入門：結晶格子の幾何学と中心極限定理
3. 学会等名 Summer School 数理物理 2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Kawabi
2. 発表標題 Uniqueness of Dirichlet forms related to stochastic quantization of $\exp(\cdot)_2$ -measures in finite volume
3. 学会等名 確率解析とその周辺 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 河備 浩司
2. 発表標題 Uniqueness of Dirichlet forms related to stochastic quantization of $\exp(\cdot)_2$ -measures in finite volume
3. 学会等名 名古屋微分方程式セミナー・名古屋確率論セミナー 合同セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 河備 浩司
2. 発表標題 Central limit theorems for non-symmetric random walks on nilpotent covering graphs
3. 学会等名 広島大学理学研究科数学教室談話会 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Seiichiro Kusuoka
2. 発表標題 Approach to the Quantum Field with Exponential Interactions by Singular SPDEs
3. 学会等名 Analysis, Random Fields and Integrable Probability (The 12th Mathematical Society of Japan, Seasonal Institute) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Kawabi
2. 発表標題 Functional central limit theorems for non-symmetric random walks on nilpotent covering graphs
3. 学会等名 International Program on Regularity Structures and Stochastic Systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroshi Kawabi
2. 発表標題 Riemannian Wasserstein geometry on the space of Gaussian measures over the Wiener space
3. 学会等名 ガウス自由場および関連する話題 (RIMS共同研究: 公開型) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroshi Kawabi
2. 発表標題 Uniqueness of Dirichlet forms related to stochastic quantization of $\exp(\cdot)_2$ -measures in finite volume
3. 学会等名 Okayama Workshop on Stochastic Analysis 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Seiichiro Kusuoka
2. 発表標題 Invariant measure and flow associated to the Λ^4 -quantum field model on the three-dimensional torus
3. 学会等名 Quantum field theory, renormalisation and stochastic partial differential equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroshi Kawabi
2. 発表標題 Riemannian Wasserstein geometry on the space of Gaussian measures over the Wiener space
3. 学会等名 One Day Workshop on Stochastic Differential Geometry (Tohoku University) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Seiichiro Kusuoka
2. 発表標題 The invariant measure and the flow associated to the Λ^3 -quantum field model
3. 学会等名 Japanese-German Open Conference on Stochastic Analysis 2017 (TU-Kaiserslautern) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hiroshi Kawabi
2. 発表標題 Functional central limit theorems for non-symmetric random walks on nilpotent covering graphs
3. 学会等名 Workshop on Mathematical Finance and Related Issues (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<https://researchmap.jp/hkawabi>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	楠岡 誠一郎 (Kusuoka Seiichiro) (20646814)	京都大学・理学研究科・准教授 (14301)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
ドイツ	Bonn大学	Bielefeld大学	