

令和 3 年 6 月 16 日現在

機関番号：16301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K05303

研究課題名(和文)ノイマン-ポアンカレ作用素のスペクトル解析とその応用

研究課題名(英文)Spectral analysis of Neumann-Poincare operators and its applications

研究代表者

安藤 和典 (ANDO, Kazunori)

愛媛大学・理工学研究科(工学系)・准教授

研究者番号：70774884

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：ノイマン-ポアンカレ作用素と呼ばれる境界積分作用素の固有値と領域境界の滑らかさの関係についての研究を行った。ノイマン-ポアンカレ作用素の固有値の集積の速さは、異常局在共鳴とも密接に関係している。主に2次元領域においてラプラシアンに付随するノイマン-ポアンカレ作用素とラメ作用素に付随するノイマン-ポアンカレ作用素に対して解析を行い、一般に領域境界が解析的な曲線の場合は固有値が集積点へ指数関数的に集積することを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

異常局在共鳴とは、数学的には微分方程式の楕円性が崩れる際にある条件のもとに見られる現象で、領域外部にエネルギーの供給源がある場合に領域境界上でエネルギーの異常な高まりを示し、遠方では微分方程式の解が有界となることである。異常局在共鳴は、物理的にも大変興味深い現象でクロッキングやスーパーレンズなど、さまざまな応用が考えられている。異常局在共鳴を示す際には、ノイマン-ポアンカレ作用素の固有値の集積の速さが密接に関係していることが知られており、今後の研究でどのような性質をもった領域で異常局在共鳴が起こるかを研究する際の足掛かりとなる研究である。

研究成果の概要(英文)：We have studied the relationship between the eigenvalues of Neumann-Poincare operators which are boundary integral operators, and the smoothness of the boundary, mainly in two-dimansions. The decay rate of the eigenvalues of Neumann-Poincare operator has a close relationship with anomalous localized resonance. We have studied the Neumann-Poincare operator associated to both the Laplace operator and the Lamé operator, and we obtained the followings: if the boundary is an analytic curve, then the eigenvalues of Neumann-Poincare operator accumulate exponentially.

研究分野：数学解析

キーワード：スペクトル解析 ノイマン-ポアンカレ作用素

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

ノイマン-ポアンカレ (NP) 作用素は境界積分作用素の一つであり、従来から偏微分作用の境界値問題の解を構成する際に用いられてきた。それらの問題に対する NP 作用素の役割としては、主に作用素のレゾルベントの存在にあった。

近年、金や銀などの貴金属やメタマテリアルなどの人工物質のナノサイズの粒子に対するプラズモン共鳴と呼ばれる現象の研究が非常に盛んに行われており、さまざまな応用 (スーパーレンズ、クロッキングなど) が考えられている。プラズモン共鳴現象の数学的な解析において、NP 作用素のスペクトル解析が有効であることが分かってきており、NP 作用素のスペクトル構造を調べることは非常に重要である。

2. 研究の目的

本研究の目的は、NP 作用素のスペクトル解析を詳細に行い、境界積分作用素に付随するさまざまな現象の数学的解析を行うことである。また、領域の形状や領域境界の滑らかさと NP 作用素のスペクトルの性質が密接に関連していることが段々と分かってきた。また、NP 作用素は微分作用素に付随して定義されるので、微分作用素の性質と NP 作用素のスペクトルは関連している。そこで、具体的には以下のような目的で研究を行う。

- (1) 2次元の有界領域において、境界の形状や滑らかさと NP 作用素のスペクトル構造についての研究を行う。2次元領域においては複素関数の手法が応用できるので、初等的な既存の研究結果を有効に活用できるという利点がある。
- (2) ラプラス作用素に付随する NP 作用素だけでなく、ラメ作用素に付随する NP 作用素のスペクトルの性質を明らかにしていく。ラメ作用素に付随する NP 作用素はコンパクトではないことがわかっており、そのスペクトル構造の解析は非常に興味深い。
- (3) 3次元において領域を徐々に変形していった際の NP 作用素の固有値の挙動について調べる。特に、球面から変形していく際、適当に有限個の固有値をまとめて和を取ると一定の値 $1/2$ になることが予想される。

3. 研究の方法

- (1) ある種の定数を領域の内部と外部で異なる値を設定して、微分作用素のトランスミッション問題の解を構成することで NP 作用素の固有値および固有関数を得るという従来の手法を基本とする。ここで構成された解は、プラズモン共鳴現象を示すある種のエネルギー量の計算においても重要な役割を果たす。
- (2) 2次元の領域を扱う際には、複素関数論的手法を用いる。NP 作用素の積分核の解析接続を行い、固有値の集積速度を評価する。

4. 研究成果

有界な領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ が $C^{1,\alpha}$ 級 ($0 \leq \alpha < 1$) の滑らかさをもつとき、ラプラシアンに付随する NP 作用素 $\mathcal{K}_{\partial\Omega}^*$ はコンパクトであることが知られている。したがって、 $\mathcal{K}_{\partial\Omega}^*$ の固有値 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ は多重度を込めて以下のように番号付けることができる：

$$1/2 > |\lambda_1| = |\lambda_2| \geq |\lambda_3| = |\lambda_4| \geq \dots \rightarrow 0.$$

また、固有値 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ の 0 への収束の速さは、プラズモン共鳴現象の存在と非常に関係があることが既存の研究で分かっている。

2次元の場合、境界 $\partial\Omega$ が C^k 級 ($k \geq 2$) のときには、任意 $\alpha > -k + 3/2$ に対して $|\lambda_n| = o(n^\alpha)$ となることが知られている (Miyanishi-Suzuki (2017))。 $\partial\Omega$ が解析的な曲線のときには、曲線の解析的なパラメータ表示 $q(t)$ を用いることで、NP 作用素の積分核を q の修正最大グロウエルト半径 ϵ_q と呼ばれるところまで解析接続することができる。 $\partial\Omega$ の修正最大グロウエルト半径とは、あらゆる解析的なパラメータ表示 q に関する修正グロウエルト半径の上限 $\epsilon_{\partial\Omega} = \sup_q \epsilon_q$ と定義する。NP 作用素の積分核をフーリエ展開して、展開係数をコーシーの積分定理を用いて評価することにより以下の定理 1 を得る。定理 1 の固有値の評価は、ある意味で最良である。

定理 1 [1]. 2次元の有界な領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ が解析的な曲線とし、 $\epsilon_{\partial\Omega}$ を境界 $\partial\Omega$ の修正最大グロウエルト半径とする。 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ をラプラシアンに付随する NP 作用素 $\mathcal{K}_{\partial\Omega}^*$ の固有値を以下のような順番に並べたものとする：

$$1/2 > |\lambda_1| = |\lambda_2| \geq |\lambda_3| = |\lambda_4| \geq \dots \rightarrow 0.$$

このとき, $\epsilon < \epsilon_{\partial\Omega}$ を満たす任意の ϵ に対してある定数 C が存在して, 任意の自然数 n に対して

$$|\lambda_{2n-1}| = |\lambda_{2n}| \leq C e^{-n\epsilon}$$

が成り立つ.

ラメ作用素はシステムなので, それ付随する NP 作用素 K はラプラシアンの場合とは異なり多項式コンパクトとなり, 固有値はラメ定数により決まる 2 点 $\pm k_0$ に収束する (Ando-Ji-Kang-Kim-Yu(2018)). 2 次元の有界領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ が解析的なときは, 各集積点 $\pm k_0$ に収束する固有値の列に関する部分空間 \mathcal{K} を射影し, 定理 1 と同様に積分核を解析接続して固有値の指数的な集積の評価を得る. ただし, 技術的な問題により, 修正最大グ라우エルト半径は円から $\partial\Omega$ へのリーマン写像 q に付随するものに限られる.

定理 2 [2]. 2 次元の有界な領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ が解析的な曲線とし, ϵ_q を境界 $\partial\Omega$ のリーマン写像に付随する修正最大グ라우エルト半径とする. このとき, ラメ作用素に付随する境界 $\partial\Omega$ 上の NP 作用素 K の $\pm k_0$ に収束する固有値 λ_j^\pm は, $\epsilon < \epsilon_q$ を満たす任意の ϵ に対して以下のような漸近挙動を示す:

$$\lambda_j^\pm = \pm k_0 + o(e^{-\epsilon j}), \quad j \rightarrow \infty$$

境界 $\partial\Omega$ が C^k 級 ($k \geq 2$) のときには, Miyanishi-Suzuki (2017) で用いられた手法を使う. すなわち, 集積点 $\pm k_0$ に収束する固有値の列に関する部分空間への K の射影をとり, 各射影空間上で積分核がソボレフ空間 $H_{x,y}^{\mu_1, \mu_2}(\partial\Omega \times \partial\Omega)$ ($\mu_1 + \mu_2 \leq k - 2 + \alpha$) に属する程度の滑らかさを持つことを示す. このことから, Delgado-Ruzhansky (2014) の結果より固有値の収束列が適切な Schatten クラスに属することが分かり, 以下の定理を得る.

定理 3 [2]. 2 次元の有界な領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ は $C^{k,\alpha}$ 級 ($k + \alpha > 2, 0 \leq \alpha < 1$) の曲線とする. このとき, ラメ作用素に付随する境界 $\partial\Omega$ 上の NP 作用素 K の $\pm k_0$ に収束する固有値 λ_j^\pm は, $d > -(k + \alpha) + 3/2$ を満たす任意の d に対して以下の漸近挙動を示す:

$$\lambda_j^\pm = \pm k_0 + o(j^d), \quad j \rightarrow \infty$$

3 次元空間の球面 $\partial\Omega$ 上の滑らかな関数 a に対して $\partial\Omega$ の以下のような摂動

$$\partial\Omega(h) = \{x + ha(x)\mathbf{n}(x) : x \in \partial\Omega\}$$

を考える. h は微小なパラメータである. 境界 $\partial\Omega(h)$ 上の NP 作用素 $\mathcal{K}_{\partial\Omega(h)}^*$ の固有値をラプラシアンのトランスミッション問題と結びつけることで調べることができる. このトランスミッション問題については Grieser (2014) によって研究されており, その結果を使うと各固有値の $h = 0$ における微分係数と固有関数の導関数を含むある種の境界積分を結びつける公式を得ることができる. 球面 $\partial\Omega$ 上の NP 作用素の固有関数は球面調和関数 $Y_{k,l}$ であり, 球面調和関数の導関数についての新たな公式を導くことで以下の定理を得る. 具体的な例の計算より, $\sum_{l=-k}^k \lambda_{k,l}(h) = 1/2$ が成り立つことが予想されるが, 定理 4 はこの予想に対して部分的な結果を与えている.

定理 4 [3]. 3 次元球面 $\partial\Omega$ からの微小な摂動を $\partial\Omega(h)$ とする. $\lambda_{k,l}(h)$ ($-k \leq l \leq k, k = 0, 1, 2, \dots$) をラプラシアンに付随する境界 $\partial\Omega(h)$ 上の NP 作用素 $\mathcal{K}_{\partial\Omega(h)}^*$ の固有値とすると, 任意の $a \in C^\infty(\partial\Omega)$ に対して, 以下が成り立つ:

$$\sum_{l=-k}^k \frac{d}{dh} \lambda_{k,l}(h) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

< 参考文献 >

- [1] K. Ando, H. Kang, Y. Miyanishi, "Exponential decay estimates of the eigenvalues for the Neumann-Poincaré operator on analytic boundaries in two dimensions", J. Integral Equations Applications 30(4): 473-489 (2018).
- [2] K. Ando, H. Kang, Y. Miyanishi, "Convergence rate for eigenvalues of the elastic Neumann-Poincaré operator in two dimensions", Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Volume 140, August (2020), 211-229.
- [3] K. Ando, H. Kang, Y. Miyanishi and E. Ushikoshi, "The first Hadamard variation of Neumann-Poincaré eigenvalues on the sphere", Proc. Amer. Math. Soc. 147 (2019), 1073-1080.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 5件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kazunori Ando, Hyeonbae Kang, Yoshihisa Miyanishi and Mihai Putinar	4. 巻 LXVI
2. 論文標題 Spectral Analysis of Neumann-Poincare Operator	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 ROMANIAN JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/proc/14246	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Kazunori Ando, Hyeonbae Kang, Yoshihisa Miyanishi	4. 巻 2019
2. 論文標題 Elastic Neumann-Poincare Operators on Three Dimensional Smooth Domains: Polynomial Compactness and Spectral Structure	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 INTERNATIONAL MATHEMATICS RESEARCH NOTICES	6. 最初と最後の頁 3883-3900
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/imrn/rnx258	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Kazunori Ando, Yoshihisa Miyanishi and Hyeonbae Kang	4. 巻 30
2. 論文標題 Exponential decay estimates of the eigenvalues for the Neumann-Poincare operator on analytic boundaries in two dimensions	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Integral Equations and Applications	6. 最初と最後の頁 473-489
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1216/JIE-2018-30-4-473	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Kazunori Ando, Yoshihisa Miyanishi, Hyeonbae Kang and Erika Ushikoshi	4. 巻 147
2. 論文標題 The First Hadamard Variation of Neumann-Poincare eigenvalues on the sphere	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1073-1080
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/proc/14246	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Ando Kazunori, Kang Hyeonbae, Miyanishi Yoshihisa	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Elastic Neumann-Poincare Operators on Three Dimensional Smooth Domains: Polynomial Compactness and Spectral Structure	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnx258	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計7件 (うち招待講演 4件 / うち国際学会 6件)

1. 発表者名 Kazunori Ando
2. 発表標題 Eigenvalues of the Neumann-Poincare operators in two dimensions
3. 学会等名 The 9th Congress of Romanian Mathematicians (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kazunori Ando
2. 発表標題 The eigenvalues of the elastic Neumann-Poincare operator in two dimensions
3. 学会等名 Mini-workshop: Neumann-Poincare operator and related topics (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kazunori Ando
2. 発表標題 Spectral properties of the Neumann-Poincare operators and anomalous localized resonance
3. 学会等名 スペクトル・散乱 那覇シンポジウム (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 安藤和典
2. 発表標題 The eigenvalues of the elastic Neumann-Poincare operator in two dimensions
3. 学会等名 Mini-workshop: Neumann-Poincare operator and related topics (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 安藤和典
2. 発表標題 弾性方程式に対するノイマン-ポアンカレ作用素のスペクトルについて
3. 学会等名 夏の作用素論シンポジウム
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kazunori Ando
2. 発表標題 Spectral analysis of the NP operator in two dimensions and cloaking by anomalous localized resonance
3. 学会等名 International Workshop: The Neumann-Poincare Operator, Plasmonics, and Field Concentration (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kazunori Ando
2. 発表標題 Spectral analysis of the elastic Neumann-Poincare operator and cloaking by anomalous localized resonance
3. 学会等名 The 3rd East Asia Section of IPIA Young Scholars Symposium (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------