

令和 6 年 5 月 11 日現在

機関番号：53601

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2023

課題番号：17K05308

研究課題名(和文)固有正則写像に関するgap現象の幾何学的解明

研究課題名(英文)the study of gap phenomenon for proper holomorphic mappings

研究代表者

林本 厚志 (HAYASHIMOTO, Atsushi)

長野工業高等専門学校・リベラルアーツ教育院・教授

研究者番号：90342493

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：この研究ではgap現象が球以外の領域に対しても成り立つことがあるのか、もしあれば、その現象を幾何学的に説明できるか、ということを知ることが目標であった。特に弱擬凸領域として複素擬楕円体の場合を考えた。問題は「2つの次元の異なる複素擬楕円体の間に固有正則写像が存在したとする。このとき次元に依存して写像が分類できるか、その分類としてgap現象が起こるか」ということである。次の定理を得ることができた。「複素擬楕円体の定義関数に含まれる"ブロック"内の次元についてある条件を満たすとする。この時定義域と値域の自己同型写像を合成すると、元の写像は恒等写像にゼロ写像を付け加えたものになる」

研究成果の学術的意義や社会的意義

・与えられた領域の間の正則写像を分類することは、以前からの大きな課題であった。領域に条件を付けたり、写像に条件を付けて分類することが行われてきた。例えば、「同じ次元球の間の固有正則写像は自己同型写像である。」「同じ次元の擬楕円体の間の固有正則写像は自己同型群の差を省くと恒等写像しかない」などである。この科研費による研究では、次元の異なる複素擬楕円体の間の固有正則写像の分類を行った。これは強擬凸領域の代表例である球の場合に成り立つ定理を、擬凸の場合に拡張したものになっている。擬凸領域に対するこのような定理はこれが最初のものと思われる。

研究成果の概要(英文)：The goal of this research is that to study the gap phenomenon for domains not equivalent to balls and to study the phenomenon by geometric approach. The problem considered is "Assume that there exists a proper holomorphic mapping between generalized pseudoellipsoids of different dimensions. Then can we classify such mappings depending on the dimensions? Does the gap phenomenon occur? "Our theorem is the following. "Assume that the dimensions in the 'blocks' in the defining functions satisfy certain conditions. then the proper holomorphic mappings between generalized pseudoellipsoids is, up to automorphisms of the both domains, identity mapping plus zero mapping."

研究分野：多変数複素関数論

キーワード：固有正則写像 gap 現象 複素擬楕円体

## 1. 研究開始当初の背景

・gap 現象は、正則写像の分類と大きくかかわっている。つまり2つの領域の間に正則写像  $f$  が存在したとする。このとき、定義域と値域の自己同型写像の差を省いて  $f$  を分類せよ、という問題である。このような問題の典型例は「同じ次元の球の間の固有正則写像は自己同型写像に限る」というものである。この定理以降、球を擬凸領域に一般化してどこまで同じような分類ができるかを調べる研究がすすめられた。その一方、次元が異なる領域に対して、写像を分類することも行われてきた。その代表例が球に対する gap 定理である。

・研究開始当初は、球に対する gap 定理が示されていた。つまり  $m$  次元球と  $n$  次元球の間に固有正則写像  $f$  が存在し、定義域の境界を越えて  $C^k$  級の滑らかさで拡張できるとする。この時に定義域と値域の自己同型写像の差を省いて  $f$  の正規型を求めるのであるが、値域の次元  $n$  が一定の区間であれば  $f$  は同じ正規型を持ち、次元に従ってゼロ写像を加えたものしかない。このような  $n$  の区間と  $f$  の正規型については部分的にしか求められていなく、それ以外については予想でしかなかった。また gap 定理が成り立たない  $n$  の区間も予想として求められていた。これが当時の状況である。

## 2. 研究の目的

・上の様な状況の下、この研究の目的は主に2つある。

1, 「球以外に gap 定理が成り立つ状況はあるのか、そのような領域はどのようなものがあるか調べること。」

これは球に対する gap 現象の擬凸領域への直接的な拡張である。強擬凸領域の代表例である球の場合に成り立つ定理を擬凸領域へ拡張することは自然なことである。また、擬凸領域の代表例が複素擬楕円体であれば、その場合にまずは gap 現象が起こることを調べることは自然なことである。

2, 「gap 現象が起こる理由を調べるために、その条件を幾何学的に求める」

gap 現象は値域の次元が制限を受けて、その制限によって gap が起こる場合と起こらない場合があり、その分類も異なる。そのため gap 現象が起こる場合を統一的に扱うにはその条件を幾何学的な不変量を使って表すことができれば、統一的に議論が進められるのではないかと、という期待がある。

## 3. 研究の方法

・球は強擬凸領域の代表例である。そのため擬凸領域では成り立つことがあるのか、を調べることが最初の研究である。擬凸領域の代表例は擬楕円体である。それを一般化した複素擬楕円体に対して gap 現象が起こるかを調べた。複素擬楕円体は定義関数に球の定義関数が複数含まれた形をしている。その一つ一つを「ブロック」と名付ける。球の場合を考えると、各ブロックの次元がある区間に入っていれば、gap 現象が起こる可能性が出てくる。まずは一つのブロックしか持たない複素擬楕円体に対して gap 定理を示す。その後ブロックを複数含む複素擬楕円体に対する議論を一つのブロックの場合に引き落とす議論を行う。これにより複数のブロックを持つ複素擬楕円体の議論を行うことができるようになる。

## 4. 研究成果

・得られた定理は次のようである。「次元の異なる複素擬楕円体で次の条件を満たすものを作る。

1, 境界は実解析的。2, 2つの複素擬楕円体の定義関数について、対応するブロックの次元の差はあまり大きくない。3, 2つの複素擬楕円体の間に固有正則写像  $f$  が存在し、それは正則的に境界まで定義域を拡張できる。以上の条件の下、 $f$  は定義域と値域の自己同型写像の差を省いて正規形に直すことができ、その形は次元の差によらず一定であり、次元が増える毎にゼロ写像を加えるだけである。」

・このような研究ができた後には、gap 現象が起こらない状況はどういう状況化を調べることになる。それは2通りある。一つは、gap 定理の仮定には、その写像が境界までである滑らかさを持って定義域を拡張できることが仮定されていた。その仮定を省いたら gap 定理は成り立つのか、ということである。この研究で得られた定理には、「写像は定義域の境界を越えて正則的に拡張できる」という仮定があった。この省けるのか、ということである。問題は「このような状況のもとでは、与えられた任意の固有正則写像は自動的に境界を越えて正則的に拡張できるか」さらに「与えられた状況の下で、そのような固有正則写像のうちで、 $C^k$  級には拡張できない例があるか」また、「与えられた状況の下で、正則的まで仮定しないで、 $C^k$  級に拡張できる条件だけ

で、定理が証明できるか」これらが問題となり、これらの問題を解くことができたことは、この研究の成果の一つである。予想としては次がある。「2つの次元の異なる複素擬楕円体の間に固有正則写像が存在するとする。もし値域の領域の次元が十分大きければ、そのような固有正則写像で、境界まで連続的に拡張できない例がある」というものである。そのような写像はディリクレ問題を解くことによって得られる連続函数を実部に持つ円盤状の正則関数で、虚部が円周上連続ではない例が存在するため、それを使って構成できるであろう。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Hayashimoto Atsushi	4. 巻 65
2. 論文標題 A classification of proper holomorphic mappings between generalized pseudoellipsoids of different dimensions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Complex variables and Elliptic equations	6. 最初と最後の頁 423, 439
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/17476933.2019.1622531	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 1件/うち国際学会 0件）

1. 発表者名 林本厚志
2. 発表標題 固有正則写像とCR写像に関する様々な決定問題
3. 学会等名 第64回函数論シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 林本厚志
2. 発表標題 Hua 領域の自己同型群と等方性群
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 林本厚志
2. 発表標題 一般複素擬楕円と固有正則写像
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------