

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 3 年 6 月 17 日現在

機関番号：12401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K05310

研究課題名(和文) 解析的手法によるメビウス・エネルギーの研究

研究課題名(英文) Research on the Moebius energy by analytic method

研究代表者

長澤 壯之 (Nagasawa, Takeyuki)

埼玉大学・理工学研究科・教授

研究者番号：70202223

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：「合成結び目型内にはメビウス・エネルギーの最小元は存在しないだろう。」という Kusner-Sullivan 予想解明に向け、メビウスの分解エネルギーの離散化、O'Hara エネルギーの分解や余弦公式などを研究した。Kusner-Sullivan 予想が正しければ、合成結び目型を初期結び目とする勾配流は(有限時刻)でブルタイトを起こすはずと考えた。その簡易化モデルとして、平面閉曲線のループの退化を考え、曲線の非局所曲率流の爆発と解が大域である場合の漸近挙動を調べた。結び目エネルギーについては、従来 O'Hara の  $(\cdot, 1)$  エネルギーについて知られていた変分公式の評価を  $(\cdot, p)$  エネルギーに拡張した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

結び目のエネルギーは、与えられた結び目型内における標準形をエネルギー最小元で定めるため O'Hara により導入され、今日では O'Hara エネルギーと呼ばれている。その中のひとつがメビウス・エネルギーであり、メビウス変換によりエネルギーを変えないことが名前の由来である。メビウス不変性は幾何学的には美しい性質であるが、解析学的にはエネルギーのスケール不変性のために変分法の直接法が利用できないという困難さを生む。各結び目型内でのメビウス・エネルギーの最小元が存在するか否かは部分的解答しか得られていない。本研究は、メビウス・エネルギーの諸性質を解析学的手法で解明することを目的とした。

研究成果の概要(英文)：We investigate the Kusner-Sullivan conjecture, which says that there do not exist minimizers of the Moebius energy in any composite knot classes. To study it, we derived structure-preserving discretization of the decomposed Moebius energies, and the decomposition and the cosine formula of O'Hara energy. If the Kusner-Sullivan conjecture is correct, then the gradient flow of Moebius energy with an initial knot of composite type may blow up in a finite time. In order to observe this, we employ the degeneration of a loop of the closed plane curve under the non-local curvature flow as a simple model. As a result, we prove that if a solution exists globally in time, it develops to a closed convex curve in a finite time, and finally converges to a circle. Concerning knot energies, we found structure-preserving discretization and lower/upper bounds of decomposed Moebius energies, and decomposition and the cosine formula of O'Hara energies.

研究分野：非線型解析学

キーワード：メビウス・エネルギー O'Hara エネルギー 分解エネルギー 余弦公式 等周不等式 補間不等式 曲率流 凸化

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

結び目とはユークリッド空間内の自己交叉を持たない閉曲線の事である。位相幾何学では、閉曲線がどのように絡んでいるかが問題となる。絡み具合が変わらないように連続変形し、絡み具合がよく見えるようにする事を考える。変形後の形状を「標準形」としよう。下の2つの結び目は絡み方は同じであり、三葉結び目と呼ばれるものである。左のものは均整がとれているが、右のものは歪んでおり、標準形とするなら左のものが選ばれるであろう。しかし、これは何を以って標準形としたかが「見た目」という主観的要素であり、数学としては明確とは言えない。

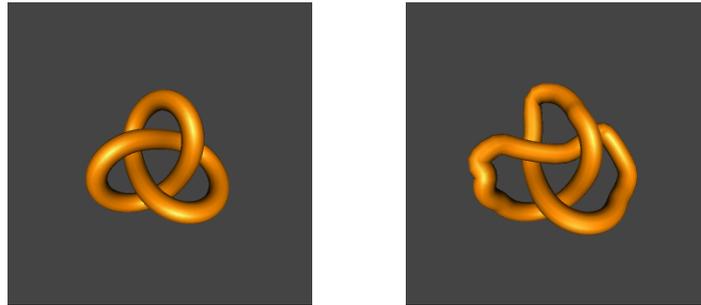


図 1: どちらが「より標準的」? (KnotPlot により著者が作図)

数学として「標準形」の明確な定義を与える必要がある。結び目のエネルギーは、与えられた結び目型内における標準形をエネルギー最小元で定めるという目的で日本の数学者 今井 淳より導入された。英語による論文は O'Hara の名前で執筆されているため、今日では O'Hara エネルギーと呼ばれている<sup>1</sup>。閉曲線の長さを  $\mathcal{L}$  とし、閉曲線を周期  $\mathcal{L}$  の関数  $\mathbf{f}$  の像であるとする。  $s$  を弧長パラメータ、  $\alpha, p$  を正定数とする。

$$\mathcal{E}_{(\alpha,p)}(\mathbf{f}) = \iint_{(\mathbb{R}/\mathcal{L}\mathbb{Z})^2} \left( \frac{1}{\|\mathbf{f}(s_1) - \mathbf{f}(s_2)\|_{\mathbb{R}^3}^\alpha} - \frac{1}{\mathcal{D}(\mathbf{f}(s_1), \mathbf{f}(s_2))^\alpha} \right)^p ds_1 ds_2$$

で与えられる汎関数が O'Hara の  $(\alpha, p)$  エネルギーと呼ばれるものである。  $\|\mathbf{f}(s_1) - \mathbf{f}(s_2)\|_{\mathbb{R}^3}$  は閉曲線上の2点  $\mathbf{f}(s_1)$  と  $\mathbf{f}(s_2)$  のユークリッド空間内での距離であり、  $\mathcal{D}(\mathbf{f}(s_1), \mathbf{f}(s_2))$  が閉曲線上の距離である。与えられた結び目型内にエネルギー最小元が存在・非存在が最も基本的な問題となる。これについては  $\alpha p > 2$  のときは存在、  $\alpha p < 2$  のときは非存在である事が分かっている。一方、  $\alpha p = 2$  のときは未解決の状態である。この場合は、相似変換に関してエネルギーが不変となるため、エネルギー最小化列エネルギー密度の集中を除外できないという事が解決に至らない理由である。

その中のひとつである  $(2, 1)$  エネルギーは相似変換だけでなくメビウス変換によってもエネルギーを変えないという性質があり、特にメビウス・エネルギーと呼ばれる。メビウス変換は、ユークリッド空間上の変換で、合同変換、相似変換、球面に関する反転とそれらの合成からなる。メビウス不変性は幾何学的には美しい性質である。

メビウス・エネルギーのメビウス不変性を見出したフリードマン-ヘ-ワンは、その性質をエネルギー最小化列に組み込むことで、結び目型が自明または素の場合、エネルギー密度の集中を起こ

<sup>1</sup>本報告書は日本人名は漢字表記、外国人名はカタカナ表記としているが、この事情のため O'Hara エネルギーについてのみ O'Hara とアルファベット表記とする。

しかけたとき、球面に関する反転を施せばエネルギーを変えずに密度の集中を解消できることを示し、それらの場合の最小元の存在を示した。この方法は、結び目型が合成である場合は機能しない。そのため、結び目型が合成である場合の最小元の存在・非存在が明らかになっていない。数値計算により合成結び目型には最小元は存在しないと予想(カズナー-サリヴァン予想)されているが、解明には至っていない。

メビウス・エネルギーは、共計角を用いた別表現があり、余弦公式と呼ばれる。これは、メビウス・エネルギーのメビウス不変性が容易に読み取れる表現となっている。更に、本研究の代表者の長澤とその周辺の研究者により、メビウス不変性を保ったまま、結び目の曲がり具合と振じれ具合を測る部分に分解できることが示されている。この分解により、エネルギーの第一・第二変分公式の表現と様々な関数空間における評価が得られる。

## 2. 研究の目的

カズナー-サリヴァン予想解明を目指し、結び目エネルギーの諸性質を解析することが目的である。メビウス・エネルギーについては、研究代表者により本研究課題以前に得られた分解定理やそれに付随した諸性質により、エネルギーの構造をより深く理解し、予想解決の手がかりを探す。エネルギー勾配流は、結び目型を変えない連続変形である。ここでは、メビウスの分解エネルギーの構造保存離散化、エネルギーの分解や余弦公式などを O'Hara エネルギーに拡張し、エネルギー勾配流の漸近解析を行う。

## 3. 研究の方法

カズナー-サリヴァン予想解明に対し、勾配流の特異挙動を探る方法を採用した。この予想が正しければ、合成結び目型を初期結び目とする勾配流は(有限時刻)爆発するはずという考えである。勾配流の数値計算を想定し、エネルギーの離散化を考える。離散化とは、結び目を多角形近似し、多角形に対するエネルギーを考察することである。従来、メビウス・エネルギーについては複数の離散化が知られていた。しかし、これらはメビウス変換に関して不変であるという性質を失っている。メビウス不変性は、メビウス・エネルギーを解析するにあたり、避けて通るべきでない重要な性質である。

本研究では、まず、メビウス不変性を持つ離散化を探した。以後、これを構造保存離散化と呼ぶことにする。その結果、構造保存離散化を複数発見したが、構造保存のためかなり複雑なものとなり数値計算に実装することが困難であった。そこで計画を次のように若干修正した。特異挙動は、結び目の一部が堅結び(プルタイト)となる現象である(下図参照)。メビウス・エネルギーの勾配

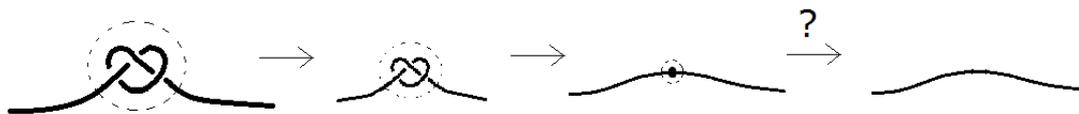


図 2: プルタイト (初出 [1])

流ではこれが有限時刻で起こると想定される。そこで平面閉曲線のループの退化を結び目勾配流に対する現象の簡易モデルとして考え、閉曲線の非局所曲率流の爆発と曲げエネルギーの関連を調べた。

また、メビウス・エネルギー固有のもの思われていた分解や余弦公式を O'Hara エネルギーに拡張する。これにより、メビウス・エネルギーを他の O'Hara エネルギーの差異をより明確にする。

#### 4. 研究成果

結び目は3次元ユークリッド空間内の閉曲線であるが、エネルギーは $n$ 次元ユークリッド空間内の閉曲線に定義される。ここで $n \geq 2$ である。定義は前式の $\mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R}^n$ とするだけである。本研究では、 $n = 3$ には限定はしていない。

##### (1) メビウス・エネルギーの構造保存離散化

まず、メビウス・エネルギーの構造保存離散化については複数種を発見した。これらは、多角形の頂点数を無限個に増やす極限操作において、元のメビウス・エネルギーに収束する事も示された。

##### (2) 分解定理・余弦公式の拡張

メビウス・エネルギーの特性を調べるため、他の結び目エネルギーに関する解析も行った。従来メビウス・エネルギーに対して知られていた分解定理、余弦公式をO'Haraの $(\alpha, 1)$ エネルギーに拡張した。 $\alpha = 2$ の場合がメビウス・エネルギーである。 $\alpha \neq 2$ の場合は、元のエネルギーがメビウス不変性でないので、分解エネルギーのメビウス不変性は議論していない。しかし、分解によりメビウス・エネルギーのときと同様なエネルギーの第一・第二変分公式の表現と様々な関数空間における評価を得ることが出来た。メビウス・エネルギーの余弦公式は、エネルギーがメビウス不変であることが容易に読み取れるエネルギーの別表現である。このことはメビウス不変でないエネルギーに対しては余弦公式に相当するものはないと考えがちである。実際には、O'Haraの $(\alpha, 1)$ エネルギーには同様の表現を見出した。これは、エネルギーのメビウス不変性とどの程度乖離しているかが見て取れるものである。これらの結果は、O'Haraの $(\alpha, 1)$ を含む更に一般化したエネルギーに対しても成り立つ。

##### (3) 変分公式の導出と評価の拡張

エネルギーの第一・第二変分公式の表現と様々な関数空間における評価については、全く別方法でO'Haraの $(\alpha, p)$ エネルギーについて拡張された。 $p \neq 1$ の場合は分解定理が知られていない(恐らく分解できない)ため、新たな手法が必要であった。

##### (4) メビウス・エネルギーの分解エネルギーの上界・下界評価と連続度評価

メビウス・エネルギーの分解エネルギーについては、より深い理解が得られた。第2エネルギーのエネルギー密度の別表示を見出し、分解エネルギーの上界・下界評価と連続度評価を導くことが出来た。この別表現はグロモフのdistortionの類似物を用いたものである。

##### (5) 平面曲線の非局所曲率流の漸近解析

平面曲線の非局所曲率流については、面積保存流、全長保存流、等周比の勾配流について考察し、回転数が1の場合は初期曲線が凸でなくても大域的に解が存在する限り有限時刻で凸化し、最終的に円に収束することを示した(本研究課題以後に、一般回転数の場合に結果は拡張された)。

以上の成果は、5編の論文に纏められ、現時点ではそのうち3編がレフェリーによる査読を終え学術誌に掲載されている。なお、本報告書で使用した図2は下記の文献に初出したものである。

## 参考文献

- [1] T. Nagasawa, *Analytic approaches to the Möbius energy: History and recent topics*, RIMS Kôkyûroku **1979** (2015), 177–193.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Takeyuki Nagasawa, Kohei Nakamura	4. 巻 24
2. 論文標題 Interpolation inequalities between the deviation of curvature and the isoperimetric ratio with applications to geometric flows	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Advances in Differential Equations	6. 最初と最後の頁 581-608
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Shoya Kawakami, Takeyuki Nagasawa	4. 巻 29
2. 論文標題 Variational formulae and estimates of O'Hara's knot energies	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Knot Theory and Its Ramifications	6. 最初と最後の頁 2050016
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0218216520500169	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Aya Ishizeki, Takeyuki Nagasawa	4. 巻 -
2. 論文標題 Decomposition of generalized O'Hara's energies	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Math Z.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00209-020-02601-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計25件（うち招待講演 14件/うち国際学会 5件）

1. 発表者名 長澤 壯之
2. 発表標題 一般化されたO'Haraエネルギーに対する余弦公式
3. 学会等名 第49回南大阪応用数学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 長澤 壯之
2. 発表標題 0'Haraエネルギー：入門と最近の話題
3. 学会等名 第41回発展方程式若手セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 長澤 壯之
2. 発表標題 一般回転数の平面閉曲線に対する非局所曲率流の漸近解析
3. 学会等名 第15回非線型の諸問題（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 長澤 壯之
2. 発表標題 一般化された0'Haraエネルギーに対する余弦公式
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会， 函数方程式分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 長澤 壯之
2. 発表標題 解析学的手法による結び目のエネルギーへのアプローチ
3. 学会等名 研究集会「微分方程式の総合的研究」（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 T. Nagasawa
2. 発表標題 Asymptotic analysis for non-local curvature flows for plane curves with general rotation number
3. 学会等名 Mini-symposium: Nonlinear Geometric Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 川上 翔矢, 長澤 壯之
2. 発表標題 O'Haraエネルギーの変分公式の評価について
3. 学会等名 日本数学会 2020年度年会 函数方程式分科会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 石関 彩, 長澤 壯之
2. 発表標題 分解されたMoebiusエネルギーの上界・下界と連続度評価
3. 学会等名 日本数学会 2020年度年会 函数方程式分科会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 長澤 壯之, 中村 恒平
2. 発表標題 一般回転数の平面閉曲線に対する非局所曲率流の漸近解析
3. 学会等名 日本数学会 2020年度年会 函数方程式分科会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 長澤 壯之
2. 発表標題 メビウス・エネルギーの構造保存離散化と分解
3. 学会等名 研究集会「数学と現象in長瀬」
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 長澤 壯之
2. 発表標題 Moebiusエネルギー：入門と最近の話題
3. 学会等名 界面現象の数理・モデリング研究合宿2018（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 長澤 壯之
2. 発表標題 MoebiusエネルギーのMoebius不変な離散化と分解
3. 学会等名 東京大学数値解析セミナー #107
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takeyuki Nagasawa
2. 発表標題 Interpolation between the isoperimetric ratio and curvature for plane curves and an application to curvature flows with non-local terms
3. 学会等名 Viscosity Solutions and Related Topics（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takeyuki Nagasawa
2. 発表標題 Large-time behavior of curvature flows with non-local terms for plane curves -- an application of interpolation between the isoperimetric ratio and curvature
3. 学会等名 Salzburg University Analysis Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 長澤 壯之
2. 発表標題 一般化された0'Haraエネルギーの分解とその帰結
3. 学会等名 第16回浜松偏微分方程式研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Nagasawa
2. 発表標題 A Moebius invariant discretization and decomposition of the Moebius energy
3. 学会等名 Recent Topics on Energy of Knots (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 S. Blatt, 長澤 壯之
2. 発表標題 分解されたMoebiusエネルギーのMoebius不変なエネルギー密度による別表現
3. 学会等名 日本数学会2017年度秋季総合分科会 函数方程式分科会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 S. Blatt, 長澤 壯之
2. 発表標題 MoebiusエネルギーのMoebius不変な離散化と分解
3. 学会等名 日本数学会2017年度秋季総合分科会 函数方程式分科会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 T. Nagasawa
2. 発表標題 A Moebius invariant discretization and decomposition of the Mobius energy
3. 学会等名 1st Workshop on Geometric Curvature Functionals and Discretization (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 長澤 壯之
2. 発表標題 MoebiusエネルギーのMoebius不変な離散化と分解
3. 学会等名 第7回室蘭非線形解析研究会 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 長澤 壯之
2. 発表標題 O'Haraエネルギーの分解とその帰結
3. 学会等名 第7回室蘭非線形解析研究会 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 T. Nagasawa
2. 発表標題 Recent topics on O'Hara's energies of knots
3. 学会等名 Saga Workshop on Partial Differential Equations (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 石関 彩, 長澤 壯之
2. 発表標題 一般化されたO'Haraエネルギーの分解について
3. 学会等名 日本数学会2018年度年会 函数方程式分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 長澤 壯之
2. 発表標題 一般回転数の平面閉曲線に対する非局所曲率流の漸近解析
3. 学会等名 早稲田大学応用解析研究会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 T. Nagasawa
2. 発表標題 Upper and lower bounds and modulus of continuity of decomposed Moebius energies
3. 学会等名 第45回偏微分方程式札幌シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 P. Reiter, S. Blatt, A. Schikorra	4. 発行年 2018年
2. 出版社 De Gruyter	5. 総ページ数 288
3. 書名 New Directions in Geometric and Applied Knot Theory	

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>研究成果は下記のweb pageで公開している。</p> <p><a href="http://www.rimath.saitama-u.ac.jp/lab.jp/TakeyukiNagasawa.html">http://www.rimath.saitama-u.ac.jp/lab.jp/TakeyukiNagasawa.html</a></p>
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	矢崎 成俊 (Yazaki Shigetoshi) (00323874)	明治大学・理工学部・教授  (32682)	
連携研究者	今井 淳 (O'Hara Jun) (70221132)	千葉大学・理学研究科・教授  (12501)	
連携研究者	立川 篤 (Tachikawa Atsushi) (50188257)	東京理科大学・理工学部・教授  (32660)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 Saitama University Analysis Seminar #88	開催年 2018年～2018年
国際研究集会 Recent Topics on Energy of Knots	開催年 2017年～2017年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------