

令和 6 年 5 月 10 日現在

機関番号：13701

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2023

課題番号：17K05315

研究課題名（和文）圧縮性流体に対する数学的手法の構築と他の方程式への応用

研究課題名（英文）Developing mathematical methods for compressible fluids and their application to other equations

研究代表者

柘植 直樹 (Tsuge, Naoki)

岐阜大学・教育学部・准教授

研究者番号：30449897

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、圧縮性オイラー方程式の解の性質を数学的に調べている。一つ目の成果は、1次元のオイラー方程式に対して、グローバル・アトラクターの存在を示した。これは、解が有界ならば、ある有界領域に吸引されることを意味する。これは解の減衰を示す上で重要な性質である。二つ目の成果は、ノズルの内部流を表す方程式に対して、古典解の時間大域的な存在を示した。この方程式は、一般に不連続解をもつことが知られている。一方、この場合の古典解は、1階連続微分可能な解を表す。不連続な解を含む時間大域解の存在は知られていたが、古典解の時間大域的な存在は知られていなかった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

圧縮性オイラー方程式に対して、大きな変動をもつ解の漸近挙動は未だに知られていない大きな未解決問題である。それを示す上で、本研究の成果であるグローバル・アトラクターの存在は非常に大きな一歩である。今までは、大きな変動をもつ解に対して、解の減衰評価は、まったく知られていなかった。本研究の結果は、それを与えるものである。

1次元の圧縮性オイラー方程式に対しては、古典解（微分可能な解）の存在は古くから知られていた。一方、ノズル流に関しては、殆ど知られていない。本研究の結果は、それを与えるという意味で有意義である。

研究成果の概要（英文）： In this study, we mathematically investigate the properties of solutions to the compressible Euler equation. The first result was the existence of a global attractor for the one-dimensional Euler equation. This means that if the solution is bounded, it will be attracted to a certain bounded region. This is an important property in showing the attenuation of the solution. The second result was the existence of a classical solution in the time-global domain for the equation expressing the internal flow of a nozzle. This equation is generally known to have discontinuous solutions. On the other hand, the classical solution in this case represents a first-order continuously differentiable solution. The existence of time-global solutions containing discontinuous solutions was known, but the existence of classical solutions in time-global terms was unknown.

研究分野：微分方程式

キーワード：圧縮性オイラー方程式 不変領域 グローバル・アトラクター 古典解 減衰評価 保存則

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

本研究では、気体の運動を表す圧縮性オイラー方程式（以下(E)と書く）を数学解析の立場から研究した。(E)は流体力学の基礎方程式であり、波動方程式に代表される双曲型という方程式に分類される。どれほど滑らかな初期値を与えても、一般に衝撃波と呼ばれる不連続解をもつという特徴がある。

1. 研究開始当初の背景

一般的に、微分方程式の解の存在や挙動を数学的に調べるとき、方程式の散逸構造が重要な役割を果たす。この構造があるため、1次元流であれば、仮に大きな振幅をもった解でも、時間が経つと定数状態になると考えられる。しかしながら、(E)は、この散逸構造が良く分かっていない。そのため、この構造を使って導かれる、定常状態に大きな摂動を加えた解の漸近挙動や、時間周期的外力を加えた場合の周期解の存在等は全く分かっていなかった。

また、台湾の研究者との共同研究で、ノズルの内部流を表す(E)の古典解の時間大域解の存在を示す研究も行った。(E)は、一般的には不連続解をもつことが知られている。そのため、不連続解を許容する弱解の範囲では時間大域解の存在は知られている。他方、滑らかな解である古典解の時間大域解の存在は殆ど知られていなかった。

2. 研究の目的

2.1 1次元の(E)に対して、時間周期外力を加えた場合の周期解の存在と、グローバルアトラクターの存在を目的とした。ここで、グローバルアトラクターというのは、どれだけ大きな値をもった解でも十分時間が経つと解を吸引するような有界集合のことである。例えば、グローバルアトラクターが1点であれば、解は定数に収束することを表す。それが最終的な目標であるが、その前段階として、グローバルアトラクターがある有界集合の場合を考えた。どれだけ大きな解でも、ある有界集合に吸引されるため、大きな振幅をもつ解の減衰評価を導く必要がある。

2.2 ノズルの内部流を表す(E)に対して、滑らかな解である古典解に注目し、その時間大域的存在を示すことを目的とした。ここでは、特に境界のある場合を考えた。

3. 研究の方法

2.1について エネルギーや質量の積分を含んだ不変領域を考え、その不変領域が縮小することを用いて、グローバルアトラクターの存在を示した。ここで、通常エネルギーや質量のような保存量は、 $-$ から $+$ までの全空間で積分して用いることが多いが、ここでは $-$ から x まで積分した値を用いた。

他方、周期解の存在を示す場合、不動点定理を用いるため、 $t=0$ にある有界集合内にある解が1周期後に同じ有界集合に含まれることを示さなければならない。しかしながら、外力によって、解は増加するため、それを打ち消す解の減衰が必要になる。それを示すために、上述したグローバルアトラクターを用いる。

2.2 古典解の時間大域的存在を示すには、未知関数およびその導関数の、時間に関して一様な有界評価を導出する必要がある。未知関数の有界評価は、研究代表者の過去の弱解で用いた、空間変数に依存する不変領域を用いた。弱解の場合と異なるのは、今回は古典解であるため、密度の下からの評価や音速を除外するような不変領域を構成しなければならないことである。

導関数の有界評価に関しては、台湾の研究者が用いていた方法を用いる。導関数を含むある汎関数を特性直線に沿って評価する。ここで、特性直線とは、解がその直線に沿って一定の値を取る直線のことであり、双曲型の方程式においては、重要な概念である。

4. 研究成果

時間周期外力を加えた(E)の1次元流に対して、周期外力の存在を示した。これは Archive for Rational Mechanics and Analysis に掲載されている。また、全空間および有界区間における1次元流のグローバルアトラクターの存在をそれぞれ示した。これらの結果は、現在投稿中である。また、複数の研究会やセミナーで講演を行った。最後に、ノズルの内部流を表す(E)に対して、古典解の時間的存在を示した。これも現在投稿中であり、これから複数の研究会やセミナーで発表予定である。

その他の研究成果として、ラバルノズルと呼ばれる気体を超音速に加速するノズルの内部流を表す(E)を考えた。摩擦の効果で音速になる位置がノズルの断面積が最小の位置よりもずれるというチョーキングと呼ばれる現象が起こる。この現象を記述する方程式に対して、時間大域解

の存在を示した。この結果は、SIAM J. Math. Anal.に掲載されている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件 / うち国際共著 3件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Tsuge, Naoki	4. 巻 247
2. 論文標題 Existence of a Time Periodic Solution for the Compressible Euler Equation with a Time Periodic Outer Force in a Bounded Interval	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Archive for Rational Mechanics and Analysis	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00205-023-01874-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 N. Tsuge, Yun-guang Lu	4. 巻 -
2. 論文標題 Uniformly time-independent L estimate for a one-dimensional hydrodynamic model of semiconductors	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Front. Math. China	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 N. Tsuge	4. 巻 -
2. 論文標題 Global existence of a solution for isentropic gas flow in the Laval nozzle with a friction	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 SIAM J. Math. Anal.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 S Kondo, NOVRIANTI, O Sawada, N Tsuge	4. 巻 58
2. 論文標題 A well-posedness for the reaction diffusion equations of Belousov-Zhabotinsky reaction	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 59-70
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Naoki Tsuge	4. 巻 Volume 53
2. 論文標題 Existence of a time periodic solution for the compressible Euler equation with a time periodic outer force	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis: Real World Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.nonrwa.2019.103080	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 S. KONDO, NOVRIANTI, O. SAWADA, N. TSUGE	4. 巻 -
2. 論文標題 A WELL-POSEDNESS FOR THE REACTION DIFFUSION EQUATIONS OF BELOUSOV-ZHABOTINSKY REACTIO	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yan-bo Hu a, Yun-guang Lu, Naoki Tsuge	4. 巻 95
2. 論文標題 Global existence and stability to the polytropic gas dynamics with an outer force	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Applied Mathematics Letters	6. 最初と最後の頁 36-40
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aml.2019.03.022	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Naoki Tsuge	4. 巻 -
2. 論文標題 GLOBAL ENTROPY SOLUTIONS TO THE COMPRESSIBLE EULER EQUATIONS IN THE ISENTROPIC NOZZLE FLOW	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 HYP2018 proceedings 印刷中	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 2件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 Naoki Tsuge
2. 発表標題 GLOBAL ENTROPY SOLUTIONS TO THE COMPRESSIBLE EULER EQUATIONS IN THE ISENTROPIC NOZZLE FLOW
3. 学会等名 HYP2018 (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 柘植直樹
2. 発表標題 ノズル内の気体の運動：時間大域解の存在と不変領域
3. 学会等名 非線形現象の数値シミュレーションと解析2018 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 柘植直樹
2. 発表標題 ノズル内の気体の等エントロピー流れ
3. 学会等名 第1回松江数理生物学・現象数理学ワークショップ
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 柘植直樹
2. 発表標題 Global entropy solutions to the compressible Euler equations in the isentropic nozzle ow for large data
3. 学会等名 流体と気体の数学解析 (招待講演)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			