

令和 5 年 6 月 7 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2022

課題番号：17K05318

研究課題名(和文) ボルツマン方程式に対する非線形超局所解析

研究課題名(英文) Nonlinear microlocal analysis for the Boltzmann equation

研究代表者

森本 芳則 (Morimoto, Yoshinori)

京都大学・人間・環境学研究所・名誉教授

研究者番号：30115646

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：切断近似をしないボルツマン方程式とその特異極限として捉えられるランダウ方程式など、粒子間の長距離相互作用を考慮した運動学方程式について、積分型フーリエ演算子を用いて初期値問題の時間大域解の存在と解の平滑化効果について考察した。非切断型ボルツマン方程式については大域的平衡解の周りで、速度変数に関する多項式オーダーで減衰する摂動解が、時間大域的に存在することが示された。ランダウ方程式についてはマクスウェル型と呼ばれる特別な場合に、大域的平衡解の摂動が速度変数について Gauss 関数の平方根以上の減衰をしていれば、初期値問題の解析的平滑化が成立することが明らかになった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

積分型フーリエ乗法演算子はボルツマン方程式の輸送項と衝突項から、空間変数の楕円性を自然に導く性質を持っている。楕円性の指数は衝突項の速度変数に関する楕円性の指数に等しく、この指数はボルツマン衝突積分項の角度変数の特異性の指数  $2s$  ( $s < 1$ ) に一致する。それゆえ非切断型ボルツマン方程式の初期値問題の解については指数  $\min\{2s, 1\}$  の Gevrey 級での平滑効果が期待されていた。この予想の解決の第一歩として、 $s=1$  とした極限の場合として考えられるランダウ方程式(衝突項が速度変数に関する非線形2階偏微分作用素)の簡単なモデルについて、初めて解析的平滑効果の証明に成功した。

研究成果の概要(英文)：The non-cutoff Boltzmann equation and the Landau equation related as its singular limit are kinetic equations in consideration of a long-range interaction of particles. The time global existence and the smoothing effect of solutions to the Cauchy problem for those equations are studied by using the Fourier multiplier of the integral form. For the non-cutoff Boltzmann equation, we obtained the time global solution perturbed around the global equilibrium which decays polynomial order with respect to the velocity variable. As to the Landau equation, it was shown for the simple Maxwellian case that the analytic smoothing effect of the perturbation around the global equilibrium occurs if the perturbation decays with the square root of the equilibrium.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：ボルツマン方程式 非切断型 多項式減衰の摂動解 ランダウ方程式 解析的平滑化効果 指数型積分演算子 対数オーダー演算子 時間大域解

## 1. 研究開始当初の背景

非平衡気体運動論の基礎方程式であるボルツマン方程式  $(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla_x)F = Q(F,F)$  は時刻  $t$  と空間位置  $x$  において速度  $v$  をもつ気体粒子の密度分布  $F(t,x,v)$  を未知関数とする微分積分方程式である。気体粒子の衝突について長距離相互作用を考慮した物理的に重要なモデルでは衝突を記述する衝突積分項  $Q$  の積分核が気体粒子の衝突角度  $\theta$  を変数として特異性  $\theta^{-1-2s}$  ( $0 < s < 1$ ) をもち、厳密な数学的取り扱いを困難にしていた。具体的には衝突項  $Q$  は、 $Q=Q_+-Q_-$  の形で衝突による発生項  $Q_+$  と消滅項  $Q_-$  の差として導出されるが、この特異性から  $Q_+$  と  $Q_-$  は共に発散してしまう。発散を避けるため、特異性をもつ角度  $\theta=0$  の部分を取り除いた角切断近似 (angular cutoff) 条件でボルツマン方程式を扱うことは伝統的であったが、この切断近似により衝突積分項がもつ特異性積分作用素としての重要な性質も失われる。実際、角度変数の特異性の指数が  $2s$  ( $0 < s < 1$ ) のとき、衝突項  $Q(F,F)$  は非線形であるが、 $F$  に対する適当な条件のもと速度変数  $v$  に関して指数  $2s$  の楕円性をもつことが知られている。粗くいって、切断近似をしないボルツマン方程式は、一般化されたコルモゴロフ作用素  $\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla_x + (-\Delta_v)^s$  のような性質を内在しており、その初期値問題の解については、指数  $\min\{2s,1\}$  の Gevrey 級の平滑効果が予想される。

特異性をもつ衝突項の特徴的な性質をより詳細に述べるためボルツマン方程式の大域的平衡解であるマクスウェル分布  $\mu$  (速度変数  $v$  のみの Gauss 関数) の摂動解として  $F = \mu + \mu^{1/2} g$  を考察すると、 $Q(F,F)$  の線形化作用素  $Lg = -\mu^{-1/2} Q(\mu, \mu^{1/2} g) - \mu^{-1/2} Q(\mu^{1/2} g, \mu)$  は、積分核がマクスウェル型と呼ばれる衝突する 2 粒子の相対速度によらない場合、 $Lg \sim (-\Delta_v + |v|^2/4 - \Delta_{LB})^s g$ ,  $\Delta_{LB} = \sum_{j \neq k} (v_j \partial_{v_k} - v_k \partial_{v_j})^2 / 2$  が成立する。これは線形化作用素  $L$  が Hermite 関数と球面調和関数で固有関数展開できる (Wang Chang-Uhlenbeck 1970) ことにより得られるが、元の一般非線形衝突積分項  $Q$  についても (上からと下からの) 同様な評価が、一定の条件のもとで成立することが Alexandre-Desvillettes-Villani-Wennberg (2000) の研究によって明らかになっていた。

代表者は切断近似をしないボルツマン方程式に対する擬微分作用素を用いた非線形超局所解析の研究を 2005 年から開始し、研究協力者 (故) 鶴飼正二 (東工大) 名誉教授、海外共同研究者 R.Alexandre、C.-J.Xu、T.Yang 教授との共同研究において空間非一様な ( $x$  変数による) 切断近似をしないボルツマン方程式の初期値問題について時間大域解を大域的平衡解  $\mu$  の摂動として構成することに成功し、また構成した大域解を含むより広い解集合に対して、切断近似をしないボルツマン方程式の特徴である解の (無限回微分可能性に関する) 平滑化がおこることを証明した。空間非一様なボルツマン方程式の時間大域的な摂動解については、速度変数  $v$  に関する減衰として因子  $\mu^{1/2}$  を仮定することが一般的であるが、切断近似をしないボルツマン方程式の時間局所解の存在は、ソフトポテンシャルと呼ばれる積分核が衝突する 2 粒子の相対速度の負べきによる場合、角度変数の特異性が弱い  $s < 1/2$  の条件の下、代表者と T.Yang 教授との共同研究 (2015) により明らかになった。一方、角切断近似のボルツマン方程式については、ハードポテンシャルと呼ばれる積分核が衝突する 2 粒子の相対速度の正べきによる場合に、減衰因子  $\mu^{1/2}$  を多項式減衰の関数  $m(v)$  に置き換える問題が、Gualdani-Mischler-Mouhot (2017) により、 $L^1 - L^\infty$  の枠で半群理論などの関数解析的方法を用いて取り組まれている。切断近似をしない場合に彼らの理論を適用するには、上述した切断近似をしない衝突積分項がもつ平滑化作用素の性質を利用する必要がある。代表者は、C.-J. Xu 教授との共同研究 (2010) で空間非一様な運動学方程式の線形モデルに対する解の平滑化の証明に積分型フーリエ乗法演算子が有効であるという着想を得ていた。

## 2. 研究の目的

積分型フーリエ乗法演算子のシンボル  $\int_0^t |\xi + \tau \xi|^{2s} d\tau$  が  $t|\xi|^{2s} + t^{2s+1}|\eta|^{2s}$  と同値であるという鶴飼不等式と輸送項のシンボル  $\partial_t - \mathbf{v} \cdot \nabla_x$  に着目して、衝突項の速度変数  $v$  の楕円性から空間変数  $x$  の楕円性を導く方法により、切断近似をしないボルツマン方程式とその特異極限と考えられるランダウ方程式 ( $s=1$  の極限として衝突項は非線形 2 階楕円型) など、気体粒子間の長距離相互作用を考慮した運動学方程式の時間大域解の存在と解の平滑化を考察する。

- (1) Gualdani-Mischler-Mouhot (2017) と同様に、積分核が衝突する 2 粒子の相対速度の正べきによる、ハードポテンシャルと呼ばれる場合に、空間変数  $x$  に関して周期的な時間大域解の存在を非切断近似のボルツマン方程式に対して証明する。
- (2) 粒子間の長距離相互作用を考慮した運動学方程式の非線形モデルに対して、初期値問題の解が、衝突項から得られる変数  $v$  の楕円性の指数と同じ指数で  $x$  変数の楕円性を導くことにより、最良と思われる指数  $\min\{2s,1\}$  の  $(x,v)$  変数に関する Gevrey 級平滑効果を示す。
- (3) 積分型フーリエ乗法演算子のシンボルの被積分関数を対数関数に置き換えた対数版を用いて、運動学方程式の  $C^\infty$  無限平滑効果の証明を試みる。

### 3. 研究の方法

(1) 代表者は海外共同研究者 C-J. Xu 氏と Rouen 大学、南京航空航天大学、京都大学で、Weiran Sun、R. Alonso、T. Yang 各氏とは香港城市大学、Simon Fraser 大学、京都大学で大型黒板、ホワイトボード、プロジェクターを用いて共同研究の機会をもった。討論結果を記録した画像ファイルをもとに電子メールにより共同研究を深化させた。

(2) 代表者は外部資金により研究プロジェクト室を確保し、海外共同研究者の来日に際しては分担者、清水教授が所属する数理科学教室のセミナー室を利用して研究環境を整えた。また、清水教授からは関数空間の補間関係について貴重な知識の提供を得た。

### 4. 研究成果

(1) 非切断型ボルツマン方程式に対する初期値問題の多項式減衰摂動解の時間大域存在について Alonso、Sun、Yang 氏との共著論文[Rev. Mat. Iberoam.2021]において以下の結果を発表した。初期値  $F_0 = \mu + f_0$  の初期摂動  $f_0(x, v)$  とその  $x$  変数に関する 2 階導関数までが、 $v$  変数に関する適当なオーダーの多項式を重みとして  $(x, v)$  について 2 乗可積分空間に属し、かつそのノルムが十分小であれば、摂動解が時間大域的に存在し、 $t \rightarrow \infty$  のとき大域的平衡解  $\mu$  に指数関数的に漸近する。結果は初期摂動が空間変数  $x$  について周期関数で、積分核がハードポテンシャルと呼ばれる 2 粒子の相対速度の正べきによる場合で、衝突角度の特異性はすべての場合  $0 < s < 1$  を含む。Herau-Tonon-Tristani [Comm. Math. Phys.2020]も同様な結果を衝突角度の特異性が弱い  $s < 1/2$  の場合に与えている。線形化作用素  $-v \cdot \nabla_x f + Q(\mu, f)$  の平滑効果の導出も、我々の積分型フーリエ乗法演算子を用いる方法とは異なる。積分型フーリエ演算子とボルツマン衝突積分作用素との交換子評価の精密化と、速度変数  $v$  のモーメントに対する Pozner 型不等式の改良で衝突角度の特異性が強い場合も扱うことが可能となった。

(2) 多項式減衰解の時間大域存在の証明で用いた積分型フーリエ乗法演算子の指数版  $G_{2s}(t, \eta, \xi) = \exp(\int_0^t |\xi + v \eta|^{2s} d\tau)$  は、鵜飼不等式により、 $\exp(t|\xi|^{2s} + t^{2s+1}|\eta|^{2s})$  と同値である。この性質に着目して、非切断型ボルツマン方程式の特異極限として捉えられるランダウ方程式の解析的平滑効果を大域的平衡解  $\mu$  の摂動解  $F = \mu + \mu^{1/2} g$  の枠組みで考察した。摂動  $g$  は  $(\partial_t + v \cdot \nabla_x)g - \mu^{-1/2} Q_L(\mu, \mu^{1/2} g) - \mu^{-1/2} Q_L(\mu^{1/2} g, \mu) = \mu^{-1/2} Q_L(\mu^{1/2} g, \mu^{1/2} g)$  をみだす。衝突項  $Q_L$  に由来する線形項と非線形項は、マクスウェル型と呼ばれる簡単な場合、調和演算子、Laplace-Beltrami 作用素を用いて表現できる。Xu 氏との共著論文[Kinet. Relat. Models, 2020]では、 $G_1(t, D_x, D_v)g(t, x, v)$  の  $(x, v)$  に関する 2 乗可積分空間でのノルムを評価することにより、摂動  $g$  の解析的平滑化を初期摂動が十分小さい場合に示すことができた。マクスウェル型でない場合のランダウ方程式、一般の非切断型ボルツマン方程式へのこの方法の拡張は、 $G_{2s}(t, D_x, D_v)$  と衝突積分項との交換子が複雑なため未解決である。

(3) 積分型フーリエ乗法演算子のシンボルの被積分関数を対数関数に置き換えた対数版

$G_{\log}(t, \eta, \xi) = \int_0^t \log(e + |\xi + v \eta|^{2s} + \tau^{2s}) d\tau$  が鵜飼タイプの不等式、

$$t(\log(e + |\xi + v \eta|^{2s} + t^{2s}) - 5) \leq G_{\log}(t, \eta, \xi) \leq t(\log(e + |\xi + v \eta|^{2s} + t^{2s}) + 5)$$

をみだすことが明らかになった。ボルツマン方程式に対する初期値問題の解の C 無限-平滑化の証明への適用の試みの前段階として、まず簡単なモデルとして、準楕円型作用素として知られるコルモゴロフ作用素のラプラシアン部分をラプラシアンの対数のべき乗に置き換えた作用素を考察した。べき乗指数を  $s$  とすると、2 乗可積分な初期値に対して C 無限平滑化が起こるための必要十分条件は  $s > 1$  であることが、上記の鵜飼タイプの不等式から導かれる。次に、ラプラシアンの対数のべき乗の部分を無限次で退化する 2 階楕円型作用素に置き換えたモデルを考察した。無限次退化の 2 階楕円型作用素が、ラプラシアンの対数の 1 を超えるべき乗の楕円性をもてば、C 無限-平滑化がおけると予想される。しかし演算子の 1 階微分がもつ技術的困難さのため、無限次で退化する部分が 2 階微分作用素ではなく 1 階より低い擬微分作用素でおきかえたモデルのみで結果は得られている。この結果については、第 38 回松山キャンプ(山口大学 2023 年)で口頭発表された。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件／うち国際共著 2件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Y. Morimoto, C.-J. Xu	4. 巻 13
2. 論文標題 Analytic smoothing effect for the nonlinear Landau equation of Maxwellian molecules.	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Kinet. Relat. Models	6. 最初と最後の頁 951-978
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3934/krm.2020033	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 R. Alonso, Y. Morimoto, W. Sun, T. Yang	4. 巻 37
2. 論文標題 Non-cutoff Boltzmann equation with polynomial decay perturbations.	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Rev. Mat. Iberoam.	6. 最初と最後の頁 189-292
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/rmi/1206	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計11件（うち招待講演 9件／うち国際学会 5件）

1. 発表者名 森本 芳則
2. 発表標題 対数オーダー積分型演算子とその応用
3. 学会等名 第38回松山キャンプ
4. 発表年 2022年～2023年

1. 発表者名 森本 芳則
2. 発表標題 The Boltzmann equation for Debye-Yukawa potential
3. 学会等名 第36回 松山キャンプ
4. 発表年 2020年～2021年

1. 発表者名 Yoshinori Morimoto
2. 発表標題 Analytic smoothing effect for the full Landau equation of Maxwellian molecules
3. 学会等名 2019 CAU-RIMS Joint Workshop on Nonlinear PDEs, Korea (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年～2020年

1. 発表者名 Yoshinori Morimoto
2. 発表標題 Ukai inequality and its application to kinetic equations
3. 学会等名 2019 南航偏微分方程青年学者会議, 南京航空航天大学 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年～2020年

1. 発表者名 森本芳則
2. 発表標題 Kolmogorov型方程式の基本解とその運動論方程式への応用
3. 学会等名 茨城大学理学部数学教室 第41 回金曜解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年～2020年

1. 発表者名 Yoshinori Morimoto
2. 発表標題 Fundamental solution for Kolmogorov type equation and its application to the kinetic equation
3. 学会等名 Chongqing University, China (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年～2020年

1. 発表者名 Yoshinori Morimoto
2. 発表標題 非切断型ボルツマン方程式の多項式減衰な摂動大域解
3. 学会等名 東北大学理学研究科数学専攻、談話会（招待講演）
4. 発表年 2018年～2019年

1. 発表者名 Yoshinori Morimoto
2. 発表標題 The spatially homogeneous Boltzmann Equation for Debye-Yukawa potential
3. 学会等名 International Conference on Nonlinear Analysis: Kinetic Theory, Gas Dynamics, and Related Fields. Institute of Mathematics, Academia Sinica, Taipei, Taiwan（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2017年～2018年

1. 発表者名 森本芳則
2. 発表標題 Revisit on the spatially homogeneous Boltzmann equation for Debye-Yukawa potential
3. 学会等名 京都大学 NLPDE セミナー（招待講演）
4. 発表年 2017年～2018年

1. 発表者名 Yoshinori Morimoto
2. 発表標題 Revisit on the Boltzmann equation for Debye-Yukawa potential
3. 学会等名 Workshop on Hyperbolic and Parabolic Systems, Mathematics and Physics Unit “ Multiscale Analysis, Modelling and Simulation ” Top Global University Project, Waseda University（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2017年～2018年

1. 発表者名 森本 芳則
2. 発表標題 切断近似をしないポルツマン方程式の時間大域解
3. 学会等名 Workshop on Transport Theory and Biomedical Optics: 輸送理論と生体医用光学 産総研：臨海副都心センター（招待講演）
4. 発表年 2017年～2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担 者	清水 扇丈  (Shimizu Senjo)  (50273165)	京都大学・人間・環境学研究所・教授    (14301)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
カナダ	Simon Fraser University			
中国	南京航空航天大学	City University of Hong Kong		
フランス	University of Rouen-Normandie			
ブラジル	PUC-Rio			