

令和 3 年 6 月 14 日現在

機関番号：14302

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K05321

研究課題名(和文) 総体積保存則に拘束される偏微分方程式と発展方程式による抽象論的接近

研究課題名(英文) Partial differential equations with the total mass conservation and related topics of abstract approach

研究代表者

深尾 武史 (Fukao, Takeshi)

京都教育大学・教育学部・教授

研究者番号：00390469

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：相分離現象を記述するカーン-ヒリアード方程式を中心に動的境界条件下において、適切性・長時間挙動・最適制御・数値アルゴリズムについて結果を得た。総質量保存則を関数空間の枠組みで捉え、問題に対応するポアンカレの不等式をはじめ、適切な枠組みを用意し、既存の抽象論が応用できることを明確にした。一方で、動的境界条件の入り方が異なる新たなモデルが研究期間中に続々と提唱され、本研究をはじめとする動的境界条件にまつわる同種の問題は益々注目されつつある。その1つとして内部と境界それぞれで質量保存則が成立する問題に対して、適切性の結果を得ることもできた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

動的境界条件下において、適切性を論じることができたいくつかの問題においては、内部の方程式より境界上の方程式の方が設定できる自由度が高い。今後は内部の方程式をある程度整え、一方で境界の方程式をより複雑にし、従来表現できなかった複雑な現象を記述しつつ、適切性が裏付けられた動的境界条件下での偏微分方程式が研究対象になることが予想される。動的境界条件というあらたな設定によって、古くから研究されてきた研究課題が再度見直され、分野の再開拓という意味で本研究によって得られた結果が応用できる道筋が構築された。

研究成果の概要(英文)：Results, well-posedness, asymptotic behavior, optimal control, and numerical analysis, for the Cahn-Hilliard system under the dynamic boundary condition were obtained applying the framework of the abstract evolution equation.

It becomes clear that the abstract theory can be applied by suitable usage of the conservation of total mass, to set up the framework of function space and preparing an appropriate framework such as Poincaré's inequality corresponding to each problem. On the other hand, new models with different dynamic boundary conditions have been proposed one after another during the research period. On this project the well-posedness of the problem which has the mass conservation separately, could be studied. The same kind of problems related to dynamic boundary conditions, including this research, will be attracting more.

研究分野：発展方程式

キーワード：動的境界条件 カーン・ヒリアード方程式 発展方程式 総質量保存則

## 1. 研究開始当初の背景

時間と空間を変数に持つ放物型偏微分方程式に対して、初期状態からの発展を追うのが初期値問題である。空間領域が有界な場合、さらに境界条件を補助的に課することで適切性が議論できる。様々な境界条件が古くから研究対象となっており、ディリクレ、ノイマン、ロバン境界条件が代表的である。いずれも領域内部が主であり境界は補助領域と見なすことが多かった。

研究開始当初、イタリアやフランスの研究チームを中心に動的もしくは力学的境界条件と呼ばれる境界条件下での様々な偏微分方程式について研究が盛んに行われていた。カーン・ヒリアード方程式においても同様で、2011年にミランヴィールらはそれまでの研究対象であった動的境界条件とはやや異なり、境界上でもカーン・ヒリアード方程式を考察する形の問題(GMSモデル)を提唱した。これは領域の内部の力学系と並行して、境界上での同種の力学系も同時に考慮する問題と言える。なお、相分離現象を記述する偏微分方程式としてよく知られているカーン・ヒリアード方程式であるが、この方程式に対しては物理的要請から、いわゆるノイマン境界条件を課して議論をする場合が多く、内部の積分量が初期値の積分量と等しく保存するという性質を持つ。一方、ミランヴィールらが提唱したGMSモデルでは、これまでの動的境界条件がアレクサンダー・カーン方程式の形をしていた点と異なり、領域の内部と境界の積分量の和が保存するという総質量保存則が成立する。この保存則の下ではこれまで過去に研究されてきた問題と本質的にどのような点に違いがあり、どのような点が共通するのか、注目されていた。

## 2. 研究の目的

本研究では相分離現象を記述するカーン・ヒリアード方程式を中心に適切性・漸近挙動・最適制御・数値アルゴリズムについて、抽象発展方程式の枠組みを応用しつつ、これまで多く研究されている境界条件での結果との比較を、特に総質量保存則に注目しながら行う。定常問題への収束など長時間挙動について、2004年のウー・ゼンの先行研究が適応できると考えられ、GMSモデルに対応する適切な設定を明確することも研究の目的の1つである。一方で単調項についてより広い設定が可能になったこと応用し、退化放物型方程式の解をカーン・ヒリアード方程式の解によって近似する着想を、これまでの先行研究で誤差評価と共に保証してきた。その結果を応用し、様々な境界条件下での退化放物型方程式に対する可解性を始めとする応用研究を行う。さらにはGMSモデルとは異なる新たなモデルに対して、GMSモデルの研究で用いられた手法がどこまで適応可能かを明確にしてゆく。

## 3. 研究の方法

尺度の異なる力学系間の接合問題をひとつの勾配系として包括的に適切性を解決する抽象発展方程式の手法の有効性が先行研究で明らかになっていた点に注目する。適切な関数空間の設定が用意できれば抽象発展方程式の枠組みで可解性が議論できることが先行研究で明らかになっていた点に注目し、漸近挙動・最適制御問題に対しても既存の結果を直接応用できる可能性が高いことが予想できた。そのため抽象発展方程式の構造を活かし、最適制御問題については境界上の外力を制御項とし、内部の状況を最適化するという問題を設定し、境界上の力学系も考慮しながら既存の最適制御問題の結果と同様の結果を得ることを試みる。また数値アルゴリズムについては、構造保存数値計算法を適用し、やはり動的境界条件下の問題にあった設定、特に部分積分公式と境界の差分を見だし、可解性と誤差評価を得る。これらの手法はGMSモデルが持つ抽象的構造がこれまで取り扱われていた問題の構造によく似ることから、適切な手法であると判断できるが、一方で新たな設定の動的境界条件下の問題に対しては構造が崩れるため、まずは可解性からその手法を改良しつつ証明を試みる。

## 4. 研究成果

最適制御問題、長時間挙動については解の正則性を必要とするため、対数型ポテンシャルを含む場合に限れば、既存の結果から予想される所まで同様の結果を得ることができた。プロジェクト開始当初は、境界上の時間微分項の存在によって、長時間挙動について新たな構造が見られることをわずかながら期待したが、GMSモデルが持つ抽象的構造がこれまでの問題と本質的に似通っていることから分かる通り、既存の結果がそのまま応用できるという事実は、結論として定常解へ全ての時間列において収束するというこれまでと同様の結論に至り、GMSモデルはこれを覆す構造を持ち合わせていないことが明確になった。すなわち研究開始時の予想は否定的に解決された。構造保存数値アルゴリズムについては1次元に限定し、境界上の拡散項のない形で、動的境界条件下でのカーン・ヒリアード方程式に対する構造保存アルゴリズムと誤差評価の結

果を得た。一方、退化放物型方程式への接近についてはロバン型境界条件下での誤差評価を得たほか、非有界領域の場合への応用ができた。

研究期間中には GMS モデルに続き新たな種類の境界条件下の問題が提唱され、これまでの総質量保存則とは異なり、内部と境界で別々の保存則を持つ LW モデルも注目され始めた。ドイツの研究チームを中心に GMS モデルと LW モデルの比較研究やその漸近解析が続々とされ始めたが、本プロジェクト内では LW モデルに対する、より広い非線形性が取り扱える枠組みでの可解性の結果を得た。

境界上での別の系を記述できるという、動的境界条件の持つ意味を鑑み、内部と境界で大きく異なる系を考察し、その接合問題として全体の系を考える問題に向けて、境界を主とみる準静的問題の可解性、境界拡散項を粘性消滅法によって消去した問題の可解性と漸近解析の結果も GMS モデルに限定して得ることができた。また、動的境界条件下でのこれらの研究から、境界単独では適切でないが、内部の方程式と接合して適切となるような問題への研究の道筋が得られた。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 11件 / うち国際共著 5件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Pierluigi Colli, Takeshi Fukao, and Hao Wu	4. 巻 293
2. 論文標題 On a transmission problem for equation and dynamic boundary condition of Cahn-Hilliard type with nonsmooth potentials	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematische Nachrichten	6. 最初と最後の頁 2051--2081
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/mana.201900361	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Takeshi Fukao	4. 巻 29
2. 論文標題 On a perturbed fast diffusion equation with dynamic boundary conditions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advances in Mathematical Sciences and Applications	6. 最初と最後の頁 365--392
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Pierluigi Colli and Takeshi Fukao	4. 巻 27
2. 論文標題 Vanishing diffusion in a dynamic boundary condition for the Cahn-Hilliard equation	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA	6. 最初と最後の頁 Article: 53
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00030-020-00654-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Takeshi Fukao and Hao Wu	4. 巻 to appear
2. 論文標題 Separation property and convergence to equilibrium for the equation and dynamic boundary condition of Cahn-Hilliard type with singular potential	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Asymptotic Analysis	6. 最初と最後の頁 1--39
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3233/ASY-201646	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Pierluigi Colli, Takeshi Fukao, and Kei Fong Lam	4. 巻 184
2. 論文標題 On a coupled bulk-surface Allen-Cahn system with an affine linear transmission condition and its approximation by a Robin boundary condition	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 116 ~ 147
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.na.2018.10.018	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Pierluigi Colli, and Takeshi Fukao	4. 巻 9
2. 論文標題 Cahn-Hilliard equation on the boundary with bulk condition of Allen-Cahn type	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Advances in Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 16 ~ 38
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/anona-2018-0055	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Takeshi Fukao and Taishi Motoda	4. 巻 4
2. 論文標題 Nonlinear diffusion equations with Robin boundary conditions as asymptotic limits of Cahn-Hilliard systems	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Elliptic and Parabolic Equations	6. 最初と最後の頁 271 ~ 291
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s41808-018-0018-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takeshi Fukao, Shunsuke Kurima, and Tomomi Yokota	4. 巻 41
2. 論文標題 Nonlinear diffusion equations as asymptotic limits of Cahn-Hilliard systems on unbounded domains via Cauchy's criterion	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Mathematical Methods in the Applied Sciences	6. 最初と最後の頁 2590 ~ 2601
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/mma.4760	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takeshi Fukao and Taishi Motoda	4. 巻 27
2. 論文標題 Abstract approach to degenerate parabolic equations with dynamic boundary conditions	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Advances in Mathematical Sciences and Applications	6. 最初と最後の頁 29 ~ 44
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takeshi Fukao and Noriaki Yamazaki	4. 巻 22
2. 論文標題 A Boundary Control Problem for the Equation and Dynamic Boundary Condition of Cahn-Hilliard Type	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 "Solvability, Regularity, Optimal Control of Boundary Value Problems for PDEs", Springer INdAM Series, Springer, Cham	6. 最初と最後の頁 255 ~ 280
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-319-64489-9_10	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takeshi Fukao, Shuji Yoshikawa, and Saori Wada	4. 巻 16
2. 論文標題 Structure-preserving finite difference schemes for the Cahn-Hilliard equation with dynamic boundary conditions in the one-dimensional case	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Communications on Pure and Applied Analysis	6. 最初と最後の頁 1915 ~ 1938
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/cpaa.2017093	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計24件 (うち招待講演 12件 / うち国際学会 6件)

1. 発表者名 深尾武史
2. 発表標題 Nonlinear diffusion equation with dynamic boundary conditions and related topics
3. 学会等名 第45回偏微分方程式論札幌シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 深尾武史, Pierluigi Colli
2. 発表標題 動的境界条件下でのCahn-Hilliard方程式系に対する境界拡散項の消滅について
3. 学会等名 日本数学会2020年度秋季総合分科会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 深尾武史
2. 発表標題 On a perturbed fast diffusion equation with dynamic boundary conditions
3. 学会等名 楢岡型・放物型微分方程式研究集会（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 深尾武史, Pierluigi Colli
2. 発表標題 Allen-Cahn型動的境界条件下でのCahn-Hilliard方程式に対する境界上での粘性消滅法に関する考察
3. 学会等名 第46回発展方程式研究会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 深尾武史
2. 発表標題 動的境界条件下でのCahn-Hilliard方程式の可解性とその周辺-発展方程式論による接近-
3. 学会等名 高専間ネットワークによる微分方程式研究会（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 深尾武史
2. 発表標題 Liu-Wuモデルに対する適切性について
3. 学会等名 第45回発展方程式研究会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takeshi Fukao
2. 発表標題 On a transmission problem for equation and dynamic boundary condition of Cahn-Hilliard type with nonsmooth potentials
3. 学会等名 復旦大学数学科学学院 数学総合報告会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 深尾武史
2. 発表標題 On a transmission problem for the equation and dynamic boundary condition of Cahn-Hilliard type
3. 学会等名 日本数学会 2019 年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takeshi Fukao
2. 発表標題 On a transmission problem for the equation and dynamic boundary condition of Cahn-Hilliard type
3. 学会等名 Workshop on Mathematical Methods and Applications with Nonlinear Evolution Equations (招待講演)
4. 発表年 2019年



1. 発表者名 Takeshi Fukao
2. 発表標題 Convergence to equilibrium for the equation and dynamic boundary condition of Cahn-Hilliard type
3. 学会等名 Equadiff 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takeshi Fukao
2. 発表標題 Perspectives in nonlinear diffusion equations as asymptotic limits of Cahn-Hilliard systems
3. 学会等名 The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 深尾武史
2. 発表標題 総体積保存則に拘束される偏微分方程式と発展方程式による抽象論的接近
3. 学会等名 日本数学会 2018 年度秋季総合分科会 応用数学科分科会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 深尾武史, Hao Wu
2. 発表標題 GMSモデルに対する大域解と純粋相からの分離定理について
3. 学会等名 第44回発展方程式研究会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 深尾武史, Hao Wu
2. 発表標題 GMSモデルに対する長時間挙動と純粹相からの分離定理について
3. 学会等名 日本数学会 2019 年度年会 実関数論分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 深尾 武史
2. 発表標題 力学的境界条件下でのCahn-Hilliard方程式とその周辺
3. 学会等名 表面・界面ダイナミクスの数理13 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 深尾 武史
2. 発表標題 Cahn-Hilliard型の方程式ならびに力学的境界条件とその周辺
3. 学会等名 岐阜数理科学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takeshi Fukao
2. 発表標題 Variational inequalities with weakly time-dependent constraint and their applications
3. 学会等名 Free Boundary Problems: Theory and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takeshi Fukao, Pierluigi Colli
2. 発表標題 Cahn-Hilliard equation on the boundary with bulk condition of Allen-Cahn type
3. 学会等名 Equadiff 2017 (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 深尾 武史
2. 発表標題 領域内部の方程式を補助条件とする境界上でのCahn-Hilliard方程式へのGMSモデルからの接近について
3. 学会等名 第8回 拡散と移流の数理 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 深尾 武史, Pierluigi Colli
2. 発表標題 領域内部の方程式を補助条件とする境界上でのCahn-Hilliard方程式の可解性について
3. 学会等名 日本数学会 2017年度秋季総合分科会 実関数論分科会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 深尾 武史, Pierluigi Colli
2. 発表標題 Allen-Cahn/Poisson 方程式を補助条件とする境界上でのCahn-Hilliard方程式について
3. 学会等名 第43回発展方程式研究会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takeshi Fukao
2. 発表標題 Recent advances in equation and dynamic boundary condition of Cahn-Hilliard type
3. 学会等名 Trends in variational evolution (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takeshi Fukao
2. 発表標題 Recent advances in Cahn-Hilliard system with dynamic boundary condition of GMS type
3. 学会等名 復旦大学数学科学学院 数学総合報告会 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takeshi Fukao
2. 発表標題 Log型ポテンシャルを持つGMSモデルにおける純粋相からの分離定理
3. 学会等名 日本数学会 2018 年度年会 実関数論分科会
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	愛木 豊彦  (Aiki Toyohiko)  (90231745)	日本女子大学・理学部・教授    (32670)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

## 8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
イタリア	Pavia University			
中国	Fudan University	Chinese University of Hong Kong		