

令和 4 年 6 月 16 日現在

機関番号：24402

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K05322

研究課題名(和文)非線形双曲型・分散型方程式の零構造と高周波漸近解析

研究課題名(英文) Null structure and high frequency asymptotic analysis for nonlinear hyperbolic and dispersive equations

研究代表者

砂川 秀明 (Sunagawa, Hideaki)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：80375394

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：高周波漸近解析の手法に基づいて、双曲型および分散型の非線形偏微分方程式に対する零構造ならびに関連する諸性質について研究した。特に、半線形波動方程式および微分型非線形シュレディンガー方程式における弱消散構造を明らかにし、解の減衰レート等について諸々の成果を得た。また、特別な連立系の場合の解の(非)減衰について、単独方程式の場合には起こり得ない新しい現象が起こることを示す例を構成することに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非線形シュレディンガー方程式における弱消散構造は、例えば光学に現れる諸問題と密接な関わりがあるため、それを解明することは幅広い応用につながる可能性を秘めていると期待される。また、線形偏微分方程式に対する高周波漸近解析の研究が超局所解析やフーリエ積分作用素の理論を誕生させ発展させたことを思い出すならば、それらの非線形版に相当する手法を整備して一つの理論体系に昇華させる試みは、純粋数学としても意義があると考えられる。

研究成果の概要(英文)：Null structure and the related properties for nonlinear partial differential equations of hyperbolic and dispersive type have been studied from the view point of high frequency asymptotic analysis. In particular, weakly dissipative structure has been revealed for semilinear wave equations and derivative nonlinear Schrödinger equations. Several results have been obtained concerning decay properties of solutions to these equations.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：零構造 弱消散構造 非線形シュレディンガー方程式 非線形波動方程式

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

双曲型および分散型方程式は広義の波動現象に由来する偏微分方程式のクラスであり、その非線形相互作用下における解の振る舞いを明らかにすることは、数学的な興味はもとより、応用上も大変重要であると広く認識されている。この 20 年余りの間に非線形双曲型および分散型方程式に対する解の存在・一意性・初期値連続依存性といったいわゆる「適切性」の研究は目覚ましく進展したが、その主要な手法は適当な関数空間の設定と其中での適当な評価式を導くことであり、解の形状そのものに直に立ち入ることができるのは依然として相当限定されている。解の形状についての詳しい情報を得たいのであれば、評価式を導くことよりも適当な近似解を見出して解の主要部を取り出す方が素直であろう。そのような発想に基づくアプローチの一つが、漸近解の方法である。線形の偏微分方程式に対しては重ね合わせの原理が成り立つので、この方法は大変効果的に機能する。特に、波動方程式(双曲型)に対する幾何光学近似とシュレディンガー方程式(分散型)に対する準古典近似は高周波漸近解析の 2 大モデルである。それらの研究が超局所解析やフーリエ積分作用素の理論を誕生させ発展させたことを思い出すならば、それらの非線形版に相当する手法を整備して一つの理論体系に昇華させることは大変興味のある問題であると考えられる。非線形方程式に対する高周波漸近解析の試みは過去にも多くの研究者によって数多くなされ、例えば 2000 年前後に Alinhac によってなされた幾何光学近似に基づいた準線形波動方程式の零条件へのアプローチや Delort による低次元非線形 Klein-Gordon 方程式の大域的可解性と準古典解析を結び付ける試み等はその典型的な成功例と言えるが、それでもなお、非線形性に起因する種々の困難を克服できたとはまだ言い難い状況であり、一層の研究が俟たれている。

2. 研究の目的

上記のような状況を踏まえて、本研究では漸近解の考察を軸にして非線形双曲型および分散型方程式の解の形状についての詳細な知見を得る方法を確認することを目標とした。特に双曲型方程式の代表格である波動方程式、分散型方程式の代表格であるシュレディンガー方程式の 2 つを主な考察対象として、幾何光学近似や準古典近似に代表される高周波漸近解析の非線形版に相当する方法を整備・発展させるとともに、零構造と呼ばれる特別な非線形構造にまつわる諸問題にそれを応用することを目指した。

3. 研究の方法

以下の 3 つのテーマに主眼を置いて研究を行った。

- A) 臨界次数の非線形項を伴うシュレディンガー方程式および波動方程式における弱消散構造の特徴づけに関する高周波漸近解析の視点からの研究。
- B) 複数の質量項をもつシュレディンガー方程式系における非線形共鳴・弱零構造と解の長時間漸近挙動の解析。
- C) 関連する非線形の諸問題への高周波漸近解析の手法の応用可能性の検討。

4. 研究成果

- (1) 複数の質量項を持つ微分型非線形シュレディンガー方程式系の弱零構造に関して、代表者は本研究課題以前に、Chunhua Li 氏との共同研究によって空間次元が 1 の場合にはある程度満足できる結果を得ていたが、これを高次元化することを目指して研究に取り組み、空間 2 次元において系がゲージ不変性を持つ場合については上記の先行結果の拡張と見なしうるような構造条件を与えることに成功した。ここで得られた結果により、Li 氏が 2012 年に得ていた非線形項に未知関数の微分が含まれない場合の結果と、代表者が 2015 年に池田正弘氏・片山聡一郎氏との共同研究で得ていた(強い)零条件が満たされる場合の結果とを統一的に捉えることが可能となった。今回の結果はさらに、M. Colin 氏と T. Colin 氏が 2004 年に提示した物理モデルも典型例として含んでおり、空間 2 次元でゲージ不変性を持つ系に関してはこれ

までに知られた結果のうちでもっとも一般的な結果であると代表者は考えている。以上の結果は迫田大輔氏との共同研究による [Journal of Differential Equations, 268 (2020), p.1722-1749]。

- (2) 2018 年度後半より、半線形波動方程式系の弱い消散構造についての研究を開始した。その出発点は、代表者と片山聡一郎氏、松村昭孝氏による 2015 年の共著論文において導入された Agemi 型の構造条件である。この条件は弱零条件の一種であり、雑に言うとは非線形消散構造を特徴づける条件と見なすことができるものであるが、このうちで退化が起こる場合に注目し、既存の枠組みにはあてはまらない興味のある例を構成することに成功した。この成果は大学院生の西井良徳氏との共同研究による [Journal of Hyperbolic Differential Equations, 17 (2020), p.459-473]。これに引き続いて、単独の半線形波動方程式の弱い消散構造についてのより詳細な研究を行った。Agemi 条件において弱い退化が起こる場合の解の長時間挙動について考察し、単独の方程式で標準的な零条件を満たさないが弱い意味での Agemi 条件を満たす場合にはエネルギー減衰が起こることを証明した。また、いくつかの特別な場合には減衰レートの定量的な評価を与えることにも成功した。この成果は大学院生の西井良徳氏、寺下拓貴氏との共同研究による [Journal of the Mathematical Society of Japan, 73 (2021), p.767-779]。
- (3) 上記研究と並行して、非線形シュレディンガー方程式において上述の非線形波動方程式系の類似物に相当すると期待される連立系に注目し、解の長時間挙動についての考察を行った。双曲型と分散型という方程式の型の違いのため全く同様という訳ではないものの、この方程式系に対しても波動方程式の場合に対比し得る、ある程度満足できる結果が得られた。また、代表者が 2016 年に Chunhua Li 氏との共同研究で得ていた結果の枠組みにはあてはまらない挙動をする解のクラスを捉えることに成功し、論文 2 編にまとめて公表した。これらの成果は Chunhua Li 氏・西井良徳氏・佐川侑司氏との共同研究による [Funkcialaj Ekvacioj, 64 (2021), p.361-377; Tokyo Journal of Mathematics, 44 (2021), 411-416]。
- (4) 上記研究に引き続き、Chunhua Li 氏、西井良徳氏、佐川侑司氏と共同で、弱い消散構造を伴う非線形シュレディンガー方程式についての研究を行った。特に 1 次元ユークリッド空間において 3 次の微分型非線形項を伴う場合の初期値問題の解について、時刻無限大における解の L^2 の意味での減衰の様子を明らかにすることを目指した。解の大域存在を保証する構造条件 (A) と、時刻無限大において解の漸近形に対数的な位相修正が生じるための構造条件 (A_0) 、および非線形項が解に消散的に作用するための構造条件 (A_+) の 3 つを比較したとき、通常のべき乗型非線形項の場合には (A) が満たされれば (A_0) または (A_+) のいずれかが満たされることは簡単に確認できるが、微分型非線形項の場合には「(A) は満たされるが (A_0) と (A_+) のいずれも満たされない」という中間的な場合があり、我々はこのような非線形項を「弱消散的」(weakly dissipative) と呼んで主たる考察対象とした。まず、 ϵ を任意に小さい正の数として、解の L^2 ノルムが $\log t$ の $(-1/4 + \epsilon)$ 乗のオーダーで上から評価されることを示した [Journal of Evolution Equations, 21 (2021), p.1541-1550]。さらにこの評価の最適性について考察を進めた。高周波漸近解析の方法に基づいて解の漸近形の主要部を特定し、弱消散的な場合には $\log t$ の $-1/4$ 乗が最適な L^2 減衰オーダーであることの証明に成功した [投稿中, arXiv:2204.07320]

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yoshinori Nishii, Hideaki Sunagawa	4. 巻 17
2. 論文標題 On Agemi-type structural conditions for a system of semilinear wave equations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Hyperbolic Differential Equations	6. 最初と最後の頁 459-473
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0219891620500125	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Chunhua Li, Yoshinori Nishii, Yuji Sagawa, Hideaki Sunagawa	4. 巻 21
2. 論文標題 On the derivative nonlinear Schrodinger equation with weakly dissipative structure	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Evolution Equations	6. 最初と最後の頁 1541-1550
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00028-020-00634-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Yoshinori Nishii, Hideaki Sunagawa, Hiroki Terashita	4. 巻 73
2. 論文標題 Energy decay for small solutions to semilinear wave equations with weakly dissipative structure	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 767-779
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/jmsj/84148414	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Chunhua Li, Yoshinori Nishii, Yuji Sagawa, Hideaki Sunagawa	4. 巻 44
2. 論文標題 Large time asymptotics for a cubic nonlinear Schrodinger system in one space dimension, II	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Tokyo Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 411-416
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3836/tjm/1502179340	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Sakoda Daisuke, Sunagawa Hideaki	4. 巻 268
2. 論文標題 Small data global existence for a class of quadratic derivative nonlinear Schrodinger systems in two space dimensions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 1722-1749
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2019.09.032	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 C.Li, Y.Nishii, Y.Sagawa, H.Sunagawa	4. 巻 64
2. 論文標題 Large time asymptotics for a cubic nonlinear Schrodinger system in one space dimension	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Funkcialaj Ekvacioj	6. 最初と最後の頁 361-377
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1619/fesi.64.361	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Yuji Sagawa, Hideaki Sunagawa, Shunsuke Yasuda	4. 巻 31
2. 論文標題 A sharp lower bound for the lifespan of small solutions to the Schrodinger equation with a subcritical power nonlinearity	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Differential and Integral Equations	6. 最初と最後の頁 685-700
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件 (うち招待講演 3件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 西井良徳、砂川秀明、寺下拓貴
2. 発表標題 Energy decay for small solutions to semilinear wave equations with weakly dissipative structure
3. 学会等名 日本数学会2020年度秋季総合分科会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Chunhua Li、西井良徳、佐川侑司、砂川秀明
2. 発表標題 Large time asymptotics for a cubic nonlinear Schrodinger system in one space dimension, II
3. 学会等名 日本数学会2020年度秋季総合分科会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 西井 良徳、砂川 秀明
2. 発表標題 半線形波動方程式系に対するAgemi型の構造条件について
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Chunhua Li 西井 良徳、佐川 侑司、砂川 秀明
2. 発表標題 Large time asymptotics for a cubic nonlinear Schrodinger system in one space dimension
3. 学会等名 日本数学会2020年度年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Hideaki Sunagawa
2. 発表標題 Small data global existence for a class of quadratic derivative nonlinear Schrodinger systems in two space dimensions
3. 学会等名 RIMS workshop "Harmonic analysis and nonlinear partial differential equations" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hideaki Sunagawa
2. 発表標題 Small data global existence for a class of quadratic derivative nonlinear Schrodinger systems in two space dimensions
3. 学会等名 Seminar on PDE with Dissipative Structure 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hideaki Sunagawa
2. 発表標題 On derivative nonlinear Schrodinger systems with multiple masses
3. 学会等名 RIMS workshop "Nonlinear Wave and Dispersive Equations" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 佐川侑司、砂川秀明、保田舜介
2. 発表標題 A sharp lower bound for the lifespan of small solutions to the Schrodinger equation with a subcritical power nonlinearity
3. 学会等名 日本数学会2017年度秋季総合分科会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 迫田大輔、砂川秀明
2. 発表標題 Small data global existence for a quadratic derivative nonlinear Schrodinger system in two space dimensions
3. 学会等名 日本数学会2018年度年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Chunhua Li 西井 良徳、佐川 侑司、砂川 秀明
2. 発表標題 On the derivative nonlinear Schrodinger equation with weakly dissipative structure
3. 学会等名 日本数学会2021年度秋季総合分科会
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計3件

国際研究集会 The 17th Linear and Nonlinear Waves	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 The 16th Linear and Nonlinear Waves	開催年 2018年～2018年
国際研究集会 The 15th Linear and Nonlinear Waves	開催年 2017年～2017年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
中国	延辺大学		