

令和 2 年 5 月 29 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K05323

研究課題名(和文)非コンパクトなエネルギー構造をもつ勾配系における特異閾値解の漸近挙動の研究

研究課題名(英文)A study of asymptotic behavior of threshold orbit arising in gradient systems with noncompact energy structure

研究代表者

石渡 通徳 (Ishiwata, Michinori)

大阪大学・基礎工学研究科・教授

研究者番号：30350458

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：相空間の中で非コンパクトな解軌道を持つ偏微分方程式のについて、時間大域的な漸近挙動を扱った。また、これらの偏微分方程式に付随する関数不等式について、非コンパクト性の状況を解析するため、最大化問題の可解性を扱った。半線型放物型方程式については、時間大域解に沿って解のソボレフノルムは有界であること、また解は有限個の全空間の平衡解が非コンパクト群作用の下で変形された「バブル」の重ね合わせで表されることを示した。Trudinger-Moser型不等式に付随する最大化問題については、コンパクト性を破壊する低階項の大きさと制約条件のパラメータの大小に依存して最大化問題の可解性が変化することが示された。

研究成果の学術的意義や社会的意義

従来の力学系理論は、解軌道が相空間の中で相対コンパクトな場合、解のオメガ極限集合が力学系の平衡点の集合の部分集合になることを主張するものであったが、本来偏微分方程式論など具体的な理論での興味は「有界な解軌道」の漸近挙動である。従って、従来の力学系理論における軌道のコンパクト性の仮定は、強すぎる仮定とみなすことができる。本研究によって扱われたいくつかの非コンパクト性を内包する偏微分方程式についての結果から、「有界性+プロファイル分解」パラダイムに基づく解析が有効であることが示された。これにより、既存の抽象力学系の理論を、解軌道が非コンパクトだが有界な場合に拡張する足掛かりを得ることができた。

研究成果の概要(英文)：We treat the time-global asymptotic behavior of some partial differential equations with non-compact solution orbits in phase space. We also deal with the solubility of the maximization problem in order to analyze the non-compactness situation for the functional inequalities associated with these partial differential equations. For semi-linear parabolic equations, it is shown that the norm of the solution is bounded along the time-global solution, and that the solution has an asymptotic behavior over time, represented by a superposition of "bubbles" in which a finite number of equilibrium solutions in the whole space are deformed under the non-compact group action associated with each of them; for maximization problems associated with Trudinger-Moser-type inequalities, it is shown that the solubility of the maximization problem varies sensitively depending on the size of the lower-order term, which acts to break the compactness of the function, and the size of the constraint parameters.

研究分野：非線型解析

キーワード：臨界型偏微分方程式 プロファイル分解 コンパクト性の破れ 時間大域解 変分問題

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

半線型放物型方程式、特に「反応拡散方程式」は、主要項として「拡散」を表現するラプラシアン、非線型項として「反応」を表す冪型非線型項をもつ方程式であるが、現実にかかる非自明な現象はほとんどが何らかの意味での「拡散」「反応」が共存するために起こるため、多くの社会現象・自然現象の標準的モデルとして理論・応用双方の観点から盛んに研究が進められている。上述の通り本方程式には「反応」「拡散」が共存しているため、系の擾乱が小さいときには、反応に対してこの擾乱に対する拡散作用が優位に効き、系は自明な平衡点に漸近し、一方で系の擾乱が大きい場合には、拡散も反応の効果も優位となり系は有限時間で爆発することが広く知られている。擾乱が小さくもなく大きくもない場合には、解軌道は非自明な状態遷移を示す場合が典型的であるが、特に方程式に付随する「エネルギー構造」「リアプノフ構造」「変分構造」ともいうが存在する場合には、こうした解軌道はエネルギー汎関数の臨界点に時間がたつにつれ漸近するという「平衡化」を示す。「自明解への漸近」(これは「死の世界への漸近」といってもよい)や「有限時間爆発」(これは「有限時間での世界の崩壊」といってもよい)だけでは到底語り尽くすことはできず、「非自明平衡状態への漸近」ことが自然現象や社会現象の多様性をコントロールしているといってもよい。従って「非自明な漸近挙動を取る時間大域解の解析」は、非線型偏微分方程式論の大きなテーマの一つとして、これまでも多くの研究がある。

既存の研究は常微分方程式に対するこれまでの膨大な研究の蓄積を「まねて」開始された側面もあり、常微分方程式に対して有効な様々なパラダイムが無意識のうちに偏微分方程式の解析に持ち込まれた。そのうちの一つは、「常微分方程式と偏微分方程式は、相空間が前者では有限次元ベクトル空間であるが後者では無限次元ベクトル空間になる点で大きな違いがあるが、『質の良い』偏微分方程式では方程式自体に『本質的な有限次元性』を導く構造が内包されているため、常微分方程式の研究と同じ指導原理が偏微分方程式でも有効である」というパラダイム、一言で言うと「コンパクト性パラダイム」である。もちろん時間局所解の存在に対する半群理論の発展など、こうしたパラダイムによる偏微分方程式の解析は目覚ましい進歩を遂げたが、このパラダイムにかからない偏微分方程式特有の現象の解析はあまりなされてこなかったと言ってよい。一方で1980年代には、こうした偏微分方程式論は、それまでの抽象論の十分な進展を背景として、実際の応用に現れる多くの具体的な方程式の解析に適用され、多くの有意義な結果を導いた。こうした中で、調和写像の存在問題、平均曲率一定曲面の存在問題、古典的ヤン・ミルズ場の存在問題、山辺の問題といった幾何学的変分問題を代表例として、上記の「コンパクト性パラダイム」の枠内では十分な解析が困難な方程式群が同時多発的に発見された。これらはすべて非コンパクト群作用の下で方程式が不変である構造をもっている。群作用がコンパクトな場合には体重臨界点の存在など、解析的に意味のある結果が多く導かれるが、非コンパクトな場合には、「コンパクト性パラダイム」の下で開発された諸理論が根こそぎ有効ではなくなるため、個別のテクニックを適用した部分的知見が導かれる状態であり、「非コンパクト群作用のもとでの不変性」という数学的構造が「方程式の解の漸近挙動」に齎す効果を解析するパラダイムは存在していなかった。

こうした中で1990年代に、いわゆる臨界関数空間の非コンパクト埋め込みの解析を通じ、「プロファイル分解」の考え方が発展してきた。これは、関数空間のノルムが非コンパクト群作用の下での不変性を持つ場合は、この(一見よくない)構造に付随して、弱位相よりも強いG位相が導入でき、任意の有界列は、無限個のプロファイルを引き抜いた後ならこの位相で収束するというものである。

この結果はまさに上述の「コンパクト性パラダイム」の下では完全な解析が難しかった偏微分方程式群に対するパラダイムを提供し得る。しかしながらその後、「プロファイル分解パラダイム」が具体的な偏微分方程式の解析に対して整備されることはなかった。

2. 研究の目的

常微分方程式の相空間は有限次元ベクトル空間であるので、解軌道の有界性とコンパクト性は同値である。従って常微分方程式の解の挙動の研究に「コンパクト性パラダイム」を持ち込むことは、解の有界性以外の余計な仮定を持ち込むことには何らつながらない。しかし偏微分方程式の相空間は無限次元ベクトル空間であるので、有界な軌道がコンパクトな軌道とは限らない。従って偏微分方程式の解析に対する「コンパクト性パラダイム」は、真に強い仮定を解に設けることになる。本研究の目的は、「コンパクト性」を仮定することなく、偏微分方程式の解軌道の「有界性」のみを仮定し、その漸近挙動を解析する枠組みを構築することにある。すなわち、従来の偏微分方程式の理論からコンパクト性の仮定を取り除く代わりにプロファイル分解の考え方を新たに導入し、理論を作り変えることを目的とする。

具体的な対象としては、

方程式がスケール不変性を持つために解軌道のコンパクト性が破れる「スケール臨界型放物型偏微分方程式」

方程式が定義されている領域が非有界であるために解軌道のコンパクト性が破れる「非有界臨界型放物型偏微分方程式」

及び、

の背景にある、非有界領域上の臨界 Trudinger-Moser 型関数不等式に付随する最大化問題

と同じ構造をもつ、平均曲率一定曲面の存在問題に付随するエネルギー汎関数の熱流の漸近挙動の解析を見据えた、Wente の不等式に付随する非コンパクト性の解析の4つの研究テーマを置いて研究を進めた。

3. 研究の方法

については、自明平衡解に収束しない時間大域解の漸近挙動を扱う。特にまずソボレフ空間におけるノルムの時間大域的有界性を確立する。エネルギー構造から、解軌道のソボレフ空間におけるノルムの下極限は有限である。よってもしソボレフ空間におけるノルムが有界でないならば、ノルムは振動現象を起こすことになる。これをプロファイル分解の技法を用いて解析する。

については、従来の研究と異なり、非線型項が必ずしも冪型ではない場合も含めて扱うので、まずエネルギー構造に付随する安定集合と不安定集合の存在を示す必要がある。これについてはミラノ大の研究グループと行った、指数型非線型項を持つ半線型放物型方程式に対する安定集合と不安定集合の存在についての論法が援用できる。また時間大域解の漸近挙動については、エネルギー構造から、無限大に発散する任意の時刻列に対し、その時刻列の近傍に、解がそれに沿って変分汎関数のパレ・スモール列になるような時間列が存在することが示せる。これを用いると、最初にとった時刻列に沿った解の列もエネルギー汎関数のパレ・スモール列になることが示せる。これにより、解の列をプロファイル分解したときの各プロファイルの特徴づけが得られる。

は、背景に空間高次元における臨界ソボレフ不等式に付随する関数空間の埋め込みの非コンパクト性がある。この変分問題は空間の非有界性とノルムの平行移動不変性に由来する「逃げ去り」現象と、空間の非有界性とノルムのスケール不変性に由来する「凝集」現象の二つの非コンパクト性に関わる現象を内包する。同様の構造を持つ空間二次元の問題として、臨界Trudinger-Moser型不等式に付随する関数空間の埋め込みの非コンパクト性がある。この変分問題も、空間の非有界性とノルムの平行移動不変性に由来する「逃げ去り」現象と、空間の非有界性とノルムの擬似スケール不変性に由来する「凝集」現象の二つの非コンパクト性に関わる現象を内包し、これを反映して付随する最大化問題の可解性の詳細は解析されていない。ではこれを、代表者によって開発された解析技法を用いて探求する。

他の臨界型関数不等式の例として、平均曲率一定曲面の存在問題を変分解析的に扱う際に現れる体積汎関数に付随する Wente の不等式がある。この場合も、体積汎関数の自然な定義域である斉次ソボレフ空間は、共形不変性から自然に導入されるスケール不変性をもつが、この空間における有界列の挙動、及び体積汎関数の有界列に分解定理はいまだ開発されていない。この解析が完了すれば、 を解決したのと同じ手法を用いて、平均曲率一定曲面の存在問題に対応する熱流を用いて解析する道が開ける。

4. 研究成果

については、時間大域解のソボレフノルムが振動しないことを、振動した場合のプロファイルが全空間の平衡解になることをしめすことによって確立した。これにより、時間大域解に沿って解のソボレフノルムは有界であること、また解は時間がたつとともに、有限個の全空間の平衡解が平行移動およびスケールの作用の下で変形された「バブル」の重ね合わせで表される漸近挙動をもつことが示された。

については安定集合と不安定集合が必ずしも冪型非線型項でない場合も存在すること、時間大域解のソボレフノルムが時間大域的に有界で、時間無限大での解のプロファイルは、全空間における非自明定常解を廃校移動したものが有限個重ね合わさったものになることが示された。

については、汎関数のコンパクト性を破壊する働きを持つ低階項の大きさを表すパラメータが十分大きな場合には、汎関数の増大度自体は劣臨界であるにもかかわらず最大化問題の解は存在しないこと、及びパラメータが小さい場合には最大化問題が可解であること、また制約条件のパラメータを変化させることによって最大化問題の可解性がドラスティックに変化することが示された。

については、体積汎関数の自然な定義域である非斉次ソボレフ空間へのスケール変換に付随するG位相が有界平均振動空間 BMO の強位相と一致すること、及びこの位相のもとで、ソボレフ空間における有界列はプロファイル分解を持つこと、さらに体積汎関数はこのプロファイル分解の下で、各プロファイルに対応する体積汎関数の重ね合わせで書けることが示された。

以上の結果は「背景」で述べた、従来の「コンパクト性パラダイム」に代わり、「有界性パラダイム」に基づく解析が有効であること、この新たなパラダイムの下でのコンパクト性の解析は、従来の「コンパクト性定理」ではなく「有界列のプロファイル分解」であるべきことを強く示唆する。

今後の課題として、これらの具体的な方程式や変分問題に対する知見のもとに、従来の抽象的な力学系理論を書き直す問題があり得る。従来の力学系理論は、解軌道が相空間の中で相対コンパクトな場合、解のオメガ極限集合が力学系の平衡点の集合の部分集合になることを主張するものであったが、本来偏微分方程式論など具体的な理論での興味は「有界な解軌道」の漸近挙動である。従って、従来の力学系理論における軌道のコンパクト性の仮定は、強すぎる仮定とみなすことができる。これを「解軌道の有界性」のみを仮定して理論を展開しようとした場合には、上述の中層プロファイル分解定理を用いて軌道の漸近挙動を解析する必要がある。予想される結果

は、有界な軌道を持つ力学系のオメガ極限集合は、通常の意味での平衡点と、群作用のもとですらされた平衡点全体からなる「拡張された平衡点」からなる集合の部分集合になる、というものである。この主張は、具体的な問題である、[\[1\]](#)では本研究により実証済であるが、抽象論の枠組みを構築できるかは今後の課題である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Ishiwata, Michinori; Wadade, Hidemitsu	4. 巻 98
2. 論文標題 On the maximizing problem associated with Sobolev-type embeddings under inhomogeneous constraints.	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Appl. Anal.	6. 最初と最後の頁 1916-1934
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ikoma, Norihisa; Ishiwata, Michinori; Wadade, Hidemitsu	4. 巻 373
2. 論文標題 Existence and non-existence of maximizers for the Moser-Trudinger type inequalities under inhomogeneous constraints	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Math. Ann.	6. 最初と最後の頁 831-851
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ishiwata Michinori, Magnanini Rolando, Wadade Hidemitsu	4. 巻 56
2. 論文標題 A natural approach to the asymptotic mean value property for the p-Laplacian	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Calculus of Variations and Partial Differential Equations	6. 最初と最後の頁 97, 22p
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00526-017-1188-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Ioku Norisuke, Ishiwata Michinori, Ozawa Tohru	4. 巻 2017
2. 論文標題 Hardy type inequalities in L^p with sharp remainders	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Inequalities and Applications	6. 最初と最後の頁 paper 5, 7pp
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1186/s13660-016-1271-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計13件（うち招待講演 11件 / うち国際学会 9件）

1. 発表者名 Michinori Ishiwata
2. 発表標題 An application of the profile-decomposition method to parabolic problems
3. 学会等名 第 699 回「応用解析」研究会, (招待講演)
4. 発表年 2018年～2019年

1. 発表者名 Michinori Ishiwata
2. 発表標題 On the profile decomposition of a volume functional
3. 学会等名 Variational analysis of critical problems on nonlinear partial differential equation (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年～2019年

1. 発表者名 Michinori Ishiwata
2. 発表標題 Bounds of Sobolev norm for solutions of semilinear parabolic equations with critical Sobolev exponent
3. 学会等名 UK-Japan Workshop on Analysis of Nonlinear Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年～2019年

1. 発表者名 Michinori Ishiwata
2. 発表標題 On the bounds of the Sobolev norm for solutions of semilinear parabolic problems with critical Sobolev exponent
3. 学会等名 Eighth Euro-Japanese Workshop on Blow-up (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年～2019年

1. 発表者名 Michinori Ishiwata
2. 発表標題 On the soliton-resolution of time-global solutions for the energy critical heat equation
3. 学会等名 京都大学NLPDEセミナー
4. 発表年 2018年～2019年

1. 発表者名 Michinori Ishiwata
2. 発表標題 On global bounds for Sobolev norms of time global solutions of parabolic problem involving critical Sobolev exponent
3. 学会等名 12th bi-annual Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年～2019年

1. 発表者名 Michinori Ishiwata
2. 発表標題 On the compactness of the Sobolev embedding involving variable exponent
3. 学会等名 12th bi-annual Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年～2019年

1. 発表者名 石渡通徳
2. 発表標題 On the soliton decomposition associated with the energy critical heat equation
3. 学会等名 社会現象と生命動態に関する偏微分方程式 (招待講演)
4. 発表年 2018年～2019年

1. 発表者名 Michinori Ishiwata
2. 発表標題 On the soliton decomposition of solutions for the energy critical parabolic equation
3. 学会等名 Theoretical Developments to Phenomenon Analyses based on Nonlinear Evolution Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年～2019年

1. 発表者名 Michinori Ishiwata
2. 発表標題 On global bounds of time-global solutions for semilinear parabolic problems with critical Sobolev exponent
3. 学会等名 Workshop Critical exponent and nonlinear evolution equations 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年～2019年

1. 発表者名 石渡通徳
2. 発表標題 On time-global bounds for solutions for semilinear parabolic equation with variable critical exponent
3. 学会等名 第26 回応用解析研究会シンポジウム
4. 発表年 2018年～2019年

1. 発表者名 Michinori Ishiwata
2. 発表標題 On the existence of global bounds of Sobolev norms for time global solutions of parabolic equation involving critical Sobolev exponent
3. 学会等名 GEOMETRIC ASPECTS OF PDE'S (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Michinori Ishiwata
2. 発表標題 On the time-global bounds of Sobolev norms of global solutions of parabolic equation involving critical Sobolev exponent
3. 学会等名 X Workshop on Nonlinear Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----