

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K05328

研究課題名(和文) 対称空間上のシュレディンガー方程式の幾何解析

研究課題名(英文) Geometric Analysis of Schroedinger equations on symmetric spaces

研究代表者

梶 知之 (Takehi, Tomoyuki)

筑波大学・数理物質系・教授

研究者番号：70231248

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：対称空間上のシュレディンガー方程式の基本解の詳細な幾何解析的構造を研究することが当初の目的であった。しかし、対称空間上の帯球関数の解析を通して、対称空間上の平均値作用素の作用素論的性質と密接に結びついていることが判り、そちらの方に注力することにした。得られた結果は以下の通り。非コンパクト対称空間上の平均値作用素を滑らかな関数の空間からそれ自身への写像と見なすとき、適当な条件下で全射であることを証明した。また、関連する合成積作用素についてもある程度の結果を得た。この結果は、将来的に、対称空間上の波動方程式への応用が期待される。

研究成果の学術的意義や社会的意義

平均値作用素および関連する合成積作用素の作用素論的性質の研究はユークリッド空間上でのみ研究されており、対称空間上では主だった結果はなかった。本研究により、平均値作用素と対称空間の幾何構造との密接な関係が明らかになったことは意義がある。また、本研究により、対称空間上で研究する有効な方法が開発された点、および、対称空間上の微分方程式や調和解析を研究するための新しい方法が提供された点でも意義がある。

研究成果の概要(英文)：At the beginning, the purpose of our research was to study the detailed geometric and analytical structure of the fundamental solution to the Schroedinger equation on symmetric spaces. However, through the analysis of zonal spherical functions on symmetric spaces, we found that our research is closely related to the study of the operator theoretical property of mean value operators on symmetric spaces. Therefore, we decided to focus on this subject. The result we obtained in our research program is as follows.

We consider the mean value operator to be a map from the space of smooth functions to itself. Then we proved that the mean value operator is surjective under some suitable conditions. We also obtained some related results on convolution operators. It is expected that our result will be applied to the wave equations on symmetric spaces.

研究分野：幾何解析

キーワード：対称空間 幾何解析 シュレディンガー方程式 平均値作用素 全射性 合成積作用素

1. 研究開始当初の背景

シュレディンガー方程式の基本解を具体的に構成することは一般にかなり難しく、ユークリッド空間上のシュレディンガー方程式であっても、幾つかの特別な場合を除いて、余り詳しいことは判っていない。研究開始時点、そして現在においてさえも、一般の枠組みでシュレディンガー方程式の基本解を具体的に構成する方法は見つかっていない。以下において、幾つかのよく知られている方法を列挙する。(i) 経路積分を用いる方法。これは全ての経路に渡っての積分を行う、即ち、無限次元での積分を行うため、数学的に厳密な定式化が難しい。確率論を用いたアプローチはあるが、基本解の表示から解の詳しいふるまいを知ることが一般的に困難である。但し、重要な情報が取り出せることは期待できない代わりに、時間大域的に解を(形式的に)表示することは可能である。(ii) WKB 法および関連する超局所解析を用いる方法。これは、ハミルトンの正準方程式系を解いて、その解曲線に沿って解を構成していくという方法であるが、時間大域的に解くことは一般的には不可能である。ただし、(i)の方法に比べれば、基本解についてある程度詳しい情報を得ることが期待できる。(iii) 既知のシュレディンガー方程式の摂動と見なせるシュレディンガー方程式に対して、関数解析的な方法と組み合わせる基本解を漸近的に構成する。これも有力な方法ではあるが、摂動がうまく行く場合に限定されてしまう。本研究は、対称空間という特別な多様体上に限定したうえで、精密にかつ時間大域的にシュレディンガー方程式を解くことになるため、上記 (i),(ii),(iii) のどれも適用できない。更に、コンパクトリーマン多様体上のシュレディンガー方程式の基本解の構成については、球面のような比較的簡単な構造の多様体の場合でさえ、詳しいことは判っていなかった。こうした困難さの下で本研究を開始することになった。

一方、対称空間というある種の対称性の高いリーマン多様体上であれば、表現論的な手法を用いて、シュレディンガー方程式の基本解の構造を詳しく調べることが可能ではないかという期待があり、実際、本研究の研究代表者等によって、既にある程度有意義な結果は得られていた。

2. 研究の目的

コンパクト対称空間上の、そして、非コンパクト対称空間上のシュレディンガー方程式の基本解をなるべく具体的に構成し、基本解の幾何解析的構造を調べる。具体的には、(a) コンパクト対称空間上のシュレディンガー方程式の基本解の有理数時間における代数的構造と対称空間の幾何解析的構造との関係を明らかにする。(b) 非コンパクト対称空間上のシュレディンガー方程式の基本解の漸近挙動と対応するレゾルベントの極の構造を調べ、散乱理論へと応用する。更に、上記の目的が十分に達成された上で、シュレディンガー方程式に関する結果を対称空間上の調和解析の諸問題へと応用する。

3. 研究の方法

当初は、シュレディンガー方程式の基本解を構成するために重要な役割を果たす帯球関数のワイル領域上での振る舞いと代数的な性質との関係を Heckman-Opdam 理論を用いて調べる、という方法を取った。勿論、これはかなり有効な方法であったが、これに加えて、基本解の表示に於いて重要な役割を果たす平均値作用素に着目し、その作用素論的性質を調べるという方法に重点を置くことにした。また、更に対象を広げ、対称空間上の合成積作用素についても作用素論的性質とコンパクト台を持つ超関数のフーリエ・ラプラス変換の漸近挙動との関係について調べた。

次に、研究費の使途との関係を説明する。2017 年度～2019 年度途中までは、当初の計画・方法に従って研究を行っていた。具体的には、研究集会を開催し、本研究に関係する研究者に講演して頂き、研究集会を通して研究交流・研究討論を行う事で、本研究の研究課題に関する知見を深める、という方法である。また、研究途中までに得られた成果を国内外の研究集会で発表することも行った。これらの研究活動のために、即ち、研究集会の開催、および、国内外への出張のために本研究課題の科学研究費を使用した。2019 年度の途中、および 2020 年度、2021 年度については、新型コロナウイルス感染症への対応のため、研究計画・方法を大幅に見直すことになった。まず、予定していた国内外への旅行を中止せざるを得なくなった。更に、当初の予定通りのやり方で研究集会を開催することも断念せざるを得なくなった。その代わりに、本研究課題に関する科学研究費により、オンラインで研究交流を行うための PC および周辺機器を購入し、オンラインでの研究集会、および、セミナーに参加し、必要に応じて研究成果を発表するというところを行った。また、上記で述べたオンライン研究用の PC を用いて、海外の研究者と定期的にセミナーも行った。(このオンラインセミナーは現在も継続中である。) 具体的には、ゴンザレス教授(タフツ大学、アメリカ)、ワン氏(タフツ大学、アメリカ)、クリステンセン教授(コルゲート大学、アメリカ)以上 3 名の研究者と、毎週木曜日の夜 10 時あるいは 11 時くらいから(アメリカ東部の時間では朝の 9 時、あるいは 10 時から) ZOOM を用いてオンラインセミナーを開催し、毎週、各自が得た結果を発表し、研究討論を行った。

4. 研究成果

研究目的であるシュレディンガー方程式の基本解の幾何解析的性質の解明については、現在も研究を継続中であるが、その研究の副産物として以下の研究成果を得た。

(1) $X=G/K$ を非コンパクト対称空間とする。平均値作用素は X のワイル領域の元 (r とする) でパラメーターづけられ、 r は一般には高次元のユークリッド空間の元となる。(階数 1 の場合、 $0 < r$ となる。) そして、 X 上の滑らかな関数全体からなる空間からそれ自身への連続線形作用素として、平均値作用素 M^r が定まる。実際には、平均値作用素は r に依存して決まる K 軌道上で関数を積分するという積分作用素である。得られた結果は以下の通りである。(a) r が十分大きく、かつ、ワイル領域の境界から離れている場合、平均値作用素 M^r は全射となる。(b) X の階数が 1 の場合は、任意の $r > 0$ に対して全射となる。また、関連する合成積作用素に関して重要な結果を与えた。(3) を参照。) 尚、これはクリステンセン教授 (コルゲート大学、アメリカ) および、ゴンザレス教授 (タフツ大学、アメリカ) との国際共同研究であり、関連する論文を海外の学術誌 *Journal of Functional Analysis* から出版した。

(2) ユークリッド空間上の半線形反応拡散系の解の挙動を調べ、論文としてまとめた。得られた結果を述べる。低エネルギー領域でのラプラシアンの影響を調べるため、非線形項を付加し、かつ、ラプラシアンをフラクショナルラプラシアンで置き換え、爆発の臨界指数とライフスパンを決定した。その結果、フラクショナルラプラシアンの指数が小さくなるほど、爆発が起こりにくくなることが判明した。これは研究当初の予想とは大きく食い違う結果であり、本研究によって、低エネルギー領域での粒子の振る舞いが本質的に解の爆発に寄与することが定量的に示された。これは大下承民教授 (岡山大学) との共同研究であり、関連する論文を *Mathematical Journal of Okayama University* から出版した。

(3) $X=G/K$ を非コンパクト対称空間とし、 μ を X 上のコンパクト台を持つ超関数で K 不変とする。 μ との合成積を取るという操作 $f \mapsto f * \mu$ により、 X 上の滑らかな関数全体の空間からそれ自身への連続線形作用素が定まる。この枠組みで合成積作用素を考える。この時、クリステンセン教授、ゴンザレス教授との 2017 年の共著論文で、 μ のフーリエ変換がエーレンプライスの意味で slow decrease property を満たせば、合成積作用素は全射となる。(Christensen, Gonzalez, and Kakehi, *Journal of Functional Analysis*, 2017) ということが示されている。今年度の研究では、この逆が成り立つことを証明した。上記をまとめると、「 μ のフーリエ変換がエーレンプライスの意味で slow decrease property を満たすことが、合成積作用素が全射となるための必要十分条件となる」という結果が得られた。尚、これは、ゴンザレス教授 (タフツ大学、アメリカ)、ワン氏 (タフツ大学大学院生 (当時)、アメリカ) との国際共同研究であり、関連する論文を海外の学術誌 *Journal of Functional Analysis* から出版した。

(4) 尚、論文としてはまとめられていないが、対称空間上の波動方程式に関する snapshot 問題も研究した。シュレディンガー方程式の基本解を波動方程式の基本解を用いて表示する、という方法があり、本研究の研究代表者は波動方程式からのアプローチも検討していた。そうした中で派生した研究である。通常、波動方程式、および、その一般化である双曲型方程式は、コーシー問題として扱われ、時刻 $t=0$ におけるコーシーデータを与えて解を構成し、その性質を調べる、ということが活発に研究され続けてきた。snapshot 問題では、波動方程式のコーシーデータを与える代わりに、幾つかの時刻を指定し、その時刻における解を与えて、そこから時間大域的に波動方程式の解を構成し、その性質を調べる、ということを行う。これに関しても、ある程度の結果を出すことが出来、とある研究集会で成果を発表した。ただし、現時点で論文としてまとめることは見送り、もう少し結果を洗練し一般化してからまとめる方向で検討している。尚、これも、ゴンザレス教授 (タフツ大学、アメリカ)、ワン氏 (タフツ大学、アメリカ)、クリステンセン教授 (コルゲート大学、アメリカ) 以上 3 名の研究者との国際共同研究である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Gonzalez Fulton, Wang Jue, Kakehi Tomoyuki	4. 巻 280
2. 論文標題 Surjectivity of convolution operators on noncompact symmetric spaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Functional Analysis	6. 最初と最後の頁 108805 ~ 108805
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jfa.2020.108805	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Christensen Jens, Gonzalez Fulton, Kakehi Tomoyuki	4. 巻 272
2. 論文標題 Surjectivity of mean value operators on noncompact symmetric spaces	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Functional Analysis	6. 最初と最後の頁 3610 ~ 3646
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jfa.2016.12.022	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Kakehi Tomoyuki, Oshita Yoshihito	4. 巻 59
2. 論文標題 Blowup and global existence of a solution to a semilinear reaction-diffusion system with the fractional Laplacian	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Mathematical Journal of Okayama University	6. 最初と最後の頁 175 - 218
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 6件/うち国際学会 2件）

1. 発表者名 Tomoyuki Kakehi
2. 発表標題 Mean Value Operators on Non-compact Symmetric Spaces
3. 学会等名 Modern Challenges in Imaging（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 寛 知之
2. 発表標題 Snapshot problem for wave equations
3. 学会等名 2019 夏の作用素論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 寛 知之
2. 発表標題 Mean Value Operators on Euclidean spaces and Noncompact Symmetric spaces
3. 学会等名 RIMS共同研究 幾何構造がもたらすスペクトル解析における新展開 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 寛 知之
2. 発表標題 対称空間上の平均値作用素
3. 学会等名 研究集会 第1回 解析学の壺 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tomoyuki Kakehi
2. 発表標題 Mean value operators on noncompact symmetric spaces
3. 学会等名 Himeji Conference on Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 寛 知之
2. 発表標題 平均値作用素の全射性
3. 学会等名 「微分方程式と幾何学」研究集会（招待講演）
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Tomography and Inverse Problems	開催年 2019年～2019年
---	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
米国	タフツ大学	コルゲート大学	