

令和 3 年 6 月 5 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K05333

研究課題名(和文)非線形放物型偏微分方程式の解の特異性と定常問題

研究課題名(英文)Singularity of solutions and stationary problems for nonlinear parabolic equations

研究代表者

内藤 雄基(Naito, Yuki)

広島大学・先進理工系科学研究科(理)・教授

研究者番号：10231458

交付決定額(研究期間全体):(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文): 優 Sobolev 臨界指数を持つ非線形楕円型偏微分方程式に対して特異解の存在・一意性を示し、さらに有界な解の極限として特異解が得られることを示した。

また、優 Sobolev 臨界増大非線形項をもつ非線形熱方程式の正值解について、後方自己相似解と前方自己相似解の接続を考慮することにより、不完全爆発解の構成を行った。とくに、ODE的手法を用いたアプローチにより、特異定常解よりも大きい爆発形状をもちながら爆発後に延長可能な解の存在を示すことができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非線形楕円型偏微分方程式に対する境界値問題に対して、特異解から分岐構造を解析するという新たな手法の確立が期待できる。

特異定常解より大きな爆発形状をもつ不完全爆発解の構成により「爆発形状が特異定常解より大きければ完全爆発である」という直感を裏切る結果が得られた。これにより、非線形熱方程式における爆発問題において新たな進展が期待できる。

研究成果の概要(英文): We showed the existence and the uniqueness of the singular solutions to semilinear elliptic partial differential equations with Sobolev super-critical nonlinearity. We also showed the convergence of regular solutions to the singular solution.

We consider positive solutions of the semilinear heat equation with supercritical power nonlinearity, and construct peaking solutions by connecting a backward selfsimilar solution with a forward self-similar solution. In particular, we show the existence of incomplete blow-up solutions with blow-up profile above the singular steady state.

研究分野：数物系科学

キーワード：非線形解析 非線形楕円型方程式 非線形熱方程式 自己相似解 特異解

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) 非線形楕円型偏微分方程式あるいは非線形放物型偏微分方程式に関する非線形問題においては、解の値が有限時刻で無限大に発散したり、初期値や方程式に含まれるパラメータをわずかに変えるだけで解の挙動や性質が大きく変化する現象が多く知られている。そのような現象に対する考察では、スケール不変性などの方程式のもつ性質や、定常問題の解構造が重要な働きをすることが知られている。

(2) 非線形熱方程式はスケール不変性をもっており、自己相似解は、相似変換を用いて書き直した問題の定常解として捉えることができる。さらに、Gelfand 構造と呼ばれる分岐構造をもつことを示唆する結果が得られており、とくに Sobolev 優臨界においては安定解の存在と不安定分離解をもつことを示すことができた。

2. 研究の目的

(1) 非線形放物型偏微分方程式に対して、解の特異性と方程式の性質・定常問題の解構造との関連性について考察を行う。とくに特徴的な爆発現象を捉える。

(2) 非線形楕円型偏微分方程式において、Sobolev 臨界および Sobolev 優臨界における、定常問題の特異解の一意存在・漸近的収束性を示し、特異解に関する線形化問題から分岐構造の分類・特徴付けを行う。

(3) 非線形放物型偏微分方程式において、特異定常解と奇数回の交点をもつ後方自己相似解列の存在を示し、それらの安定性・不安定性を考察するとともに、弱解としての解の接続および延長可能性を示す。

3. 研究の方法

(1) 非線形楕円型偏微分方程式により記述される定常問題の特異解とその線形化問題、および非線形熱方程式に現れる自己相似解の考察を通して、定常問題の解構造とともに放物型方程式の特徴的な解の挙動との関連性について考察を行う。とくに初期関数の空間無限遠方の挙動が自己相似解を通じて放物型方程式の解の時間無限大における挙動に反映されることを明らかにする。また、初期値に関する連続依存性を用いることにより、自己相似解の減衰オーダーにおいて複雑な挙動を示す解の構成を行う。

(2) Sobolev 優臨界の非線形項をもつ非線形固有値問題に対して、特異解の漸近的性質を導き、線形方程式の Liouville 型定理により一意性を示す。さらに、パラメトライズされた正則解の極限として特異解が得られることを示す。そのために Pohozaev 型恒等式に関する既存の研究を振り返るとともに、新しい適用を試みる。さらに、Joseph-Lundgren 臨界指数前後での線形化問題の Morse 指数と分岐構造の関連について考察を行うことにより、非線形固有値問題の解構造の解明を目指す。

(3) 非線形熱方程式の自己相似解の研究においては、特異定常解と奇数回の交点を持つ後方自己相似解の存在を示す。ここでは、常微分方程式の定性的理論により正当化することにより証明を与える。特異定常解より大きな爆発形状を持つ不完全爆発解の存在を示すために、後方自己相似解と前方自己相似解の接合による peaking 解を考える。また、前方自己相似解が最小解をもつという性質を利用することにより、不完全爆発解において最小解が存在すること、非最小解は互いに順序構造を持たないことを明らかにする。

(4) 優 Sobolev 臨界の問題においては、解を球対称なクラスに限定することにより常微分方程式論からのアプローチを強化する。とくに初期値問題におけるパラメータを連続的に変化させ、解の挙動の変化を考察するという shooting method (射撃法) を用いることにより、方程式の解の存在・非存在を議論するとともに多重存在性についても考察を行うことにより、方程式のもつ解全体の構造を明らかにすることを目指す。

(5) 非線形熱方程式の後方自己相似解の研究においても、解を球対称なクラスに限定することにより常微分方程式論からのアプローチを強化する。通常の shooting method では、初期値におけるパラメータを連続的に変化させ、解の挙動の変化を考察するが、ここでは無限遠方の解の漸近的性質に表れる定数をパラメータとして連続的に変化させ、解の原点近傍における解の挙動の変化を考察するという手法を用いる。この手法により、特定の漸近的性質を有する解の存在・非存在、多重存在を考察する。

4. 研究成果

(1) 非線形楕円型偏微分方程式の特異解の性質について考察を行った。優 Sobolev 臨界指数を持つ非線形問題に対して特異解の存在・一意性を示し、さらに有界な解の極限として特異解が得られることを示した。さらに、安定最小解の臨界に現れる極解が特異的であるかどうかという問題の考察を行い、特異解が極解であるための必要十分条件を線形化問題が正値解をもつかどうかという形で導いた。これにより、極解における線形化問題の非退化性について新しい知見を得ることができた。

(2) 指数関数を非線形項に持つ非線形楕円型方程式の球対称解の分離構造について考察を行った。最初に、球対称解の分離構造が「分離型」「交差型」「部分分離型」の3種に分類されることを示し、それぞれの特徴付けを行った。それにより部分分離型であるための十分条件を導くことができた。とくに臨界次元においては、係数関数のある種の単調性により分離構造が大きく変化することを示すことができた。

(3) 優 Sobolev 臨界増大非線形項をもつ非線形熱方程式の正値解について、後方自己相似解と前方自己相似解の接続を考えることにより、不完全爆発解の構成を行った。とくに、ODE 的手法を用いたアプローチにより、特異定常解よりも大きい爆発形状をもちながら爆発後に延長可能な解の存在を示すことができた。また、爆発後の解の最小接続の存在を示し、さらに非最小接続のいくつかの性質を明らかにした。

(4) 連続係数関数をもつ half-linear 非線形系の解の漸近挙動について考察を行った。2次元系における原点に収束する解の解曲線が有限長 (rectifiable) および非有限長 (nonrectifiable) であるための必要十分条件を導くことができた。とくに、一般化 Prufer 変換、解の漸近表示および非有限長の平面曲線に対する解析手法を用いることにより主要な結果が得られた。

(5) ベキ乗型の非線形項を持つ非線形熱方程式に対して、空間次元が1次元以上かつ非線形項の指数が Joseph-Lundgren の指数より大きい場合について考察を行った。自己相似解のオーダーで減衰する関数を初期値としてもつ Cauchy 問題においては、解の時間大域挙動が、初期関数の空間無限遠方での挙動で決定されることを示した。さらに、その性質と初期関数に関する連続依存性を用いることにより、自己相似解の減衰オーダーにおいて、初期関数に応じて複雑な挙動を持つ解の構成をすることができた。

(6) 優 Sobolev 臨界非線形項を持つ楕円型方程式における特異解の存在、一意性、漸近的性質について考察を行った。非線形項が、ベキ乗に摂動が加わる場合、あるいは指数関数に摂動が加わる場合、それぞれの場合に、特異解の存在、一意性、漸近的性質を示すことができた。この応用として非線形楕円型偏微分方程式に対する分岐問題に対して特異解をもつ分岐パラメータは一意であること、解の最大値パラメータを無限大にすると特異解に収束することを明らかにすることができた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計15件（うち査読付論文 15件 / うち国際共著 4件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Naito Yuki, Senba Takasi	4. 巻 181
2. 論文標題 Existence of peaking solutions for semilinear heat equations with blow-up profile above the singular steady state	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 265--293
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.na.2018.12.001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Naito Yuki	4. 巻 150
2. 論文標題 Asymptotically self-similar behaviour of global solutions for semilinear heat equations with algebraically decaying initial data	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics	6. 最初と最後の頁 789--811
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/prm.2018.97	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Ioku Norisuke, Ruf Bernhard, Terraneo Elide	4. 巻 36
2. 論文標題 Non-uniqueness for a critical heat equation in two dimensions with singular data	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non lineaire	6. 最初と最後の頁 2027~2051
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.anihpc.2019.07.004	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Ioku Norisuke	4. 巻 375
2. 論文標題 Attainability of the best Sobolev constant in a ball	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Math. Ann.	6. 最初と最後の頁 1--16
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00208-018-1776-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ioku Norisuke, Ogawa Takayoshi	4. 巻 266
2. 論文標題 Critical dissipative estimate for a heat semigroup with a quadratic singular potential and critical exponent for nonlinear heat equations	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 2274 ~ 2293
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2018.08.030	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yuki Naito, Mervan Pasic, Satoshi Tanaka	4. 巻 68
2. 論文標題 Rectifiable and nonrectifiable solution curves of half-linear differential systems	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Math. Slovaca	6. 最初と最後の頁 575--590
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/ms-2017-0126	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Soohyun Bae and Yuki Naito	4. 巻 38
2. 論文標題 Separation structure of radial solutions for semilinear elliptic equations with exponential nonlinearity	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Discrete Contin. Dyn. Syst.	6. 最初と最後の頁 4537--4554
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/dcds.2018198	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Yasuhito Miyamoto and Yuki Naito	4. 巻 265
2. 論文標題 Singular extremal soluitons for supercritical elliptic equations in a ball	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 J. Differential Equations	6. 最初と最後の頁 2842--2885
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2018.04.055	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yuki Naito and Takasi Senba	4. 巻 181
2. 論文標題 Existence of peaking solutions for semilinear heat equations with blow-up profile above the singular steady state	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Nonlinear Anal.	6. 最初と最後の頁 265--293
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.na.2018.12.001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Norisuke Ioku and Takayoshi Ogawa	4. 巻 266
2. 論文標題 Critical dissipative estimate for a heat semigroup with a quadratic singular potential and critical exponent for nonlinear heat equations	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J. Differential Equations	6. 最初と最後の頁 2274--2293
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2018.08.030	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yohei Fujishima and Norisuke Ioku	4. 巻 118
2. 論文標題 Existence and nonexistence of solutions for the heat equation with a superlinear source term	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 J. Math. Pures Appl. (9)	6. 最初と最後の頁 128--158
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.matpur.2018.08.001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Naito Yuki, Suzuki Takashi, Toyota Yohei	4. 巻 151
2. 論文標題 A priori bounds for superlinear elliptic equations with semidefinite nonlinearity	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Nonlinear Anal.	6. 最初と最後の頁 18~40
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.na.2016.11.016	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Naito Yuki	4. 巻 150
2. 論文標題 Asymptotically self-similar behaviour of global solutions for semilinear heat equations with algebraically decaying initial data	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics	6. 最初と最後の頁 789 ~ 811
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/prm.2018.97	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Cianchi Andrea, Ioku Norisuke	4. 巻 56
2. 論文標題 Canceling effects in higher-order Hardy-Sobolev inequalities	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Calculus of Variations and Partial Differential Equations	6. 最初と最後の頁 18pp
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00526-017-1112-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Ioku Norisuke, Ishiwata Michinori, Ozawa Tohru	4. 巻 2017
2. 論文標題 Hardy type inequalities in L^p with sharp remainders	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Inequalities and Applications	6. 最初と最後の頁 7pp
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1186/s13660-016-1271-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計21件 (うち招待講演 11件 / うち国際学会 9件)

1. 発表者名 内藤 雄基
2. 発表標題 Incomplete blow-up of solutions for semilinear heat equations with supercritical nonlinearity
3. 学会等名 信州大学偏微分方程式研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yuki Naito
2. 発表標題 Threshold solutions for semilinear heat equations with polynomial decay initial data
3. 学会等名 Equadiff 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 内藤 雄基、仙葉 隆
2. 発表標題 特異定常解より大きい爆発形状を持つ不完全爆発解の存在について
3. 学会等名 日本数学会 函数方程式分科会一般講演
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yuki Naito
2. 発表標題 Threshold solutions for semilinear heat equations with slowly decaying initial data
3. 学会等名 2019 International Workshop on Nonlinear PDEs and Its Application (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yuki Naito
2. 発表標題 Blow-up criteria for the simplest Keller-Segel model of chemotaxis in higher dimensions
3. 学会等名 Chemotaxis and Nonlinear Parabolic Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 内藤 雄基
2. 発表標題 Blow-up criteria for the parabolic-elliptic Keller-Segel system in higher dimensions
3. 学会等名 数学と現象 : Mathematics and Phenomena in Miyazaki 2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 内藤 雄基
2. 発表標題 Asymptotic behavior of global solutions for semilinear heat equations with slowly decaying initial data
3. 学会等名 RIMS共同研究 (公開型) 「保存則をもつ偏微分方程式の解の正則性, 特異性および漸近挙動の研究」 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 内藤 雄基
2. 発表標題 非線形熱方程式の不完全爆発解の存在について
3. 学会等名 九州関数方程式セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yuki Naito
2. 発表標題 An ODE approach to backward self-similar solutions for semilinear heat equations
3. 学会等名 NTHU Department of Mathematics Visiting Scholar Colloquium (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yuki Naito
2. 発表標題 Positive singular solutions for semilinear elliptic equations with supercritical nonlinearity
3. 学会等名 The 12Th AIMS conference, SS101 "Structure of solutions for nonlinear elliptic equations" (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yuki Naito
2. 発表標題 Incomplete blow-up solutions for semilinear heat equations with supercritical nonlinearity
3. 学会等名 The 12Th AIMS conference, SS102 "Asymptotics for Nonlinear Diffusion Equations and Related Topics" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 宮本安人、内藤雄基
2. 発表標題 Singular sextremal solutions for supercritical elliptic equations in a ball
3. 学会等名 日本数学会秋期総合分科会 関数方程式分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 内藤雄基
2. 発表標題 Incomplete blow-up of solutions for semilinear heat equations with supercritical nonlinearity
3. 学会等名 名古屋微分方程式セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 内藤 雄基
2. 発表標題 Existence and uniqueness of singular solutions for supercritical semilinear elliptic equations
3. 学会等名 RIMS 共同研究 (グループ型) 「常微分方程式の手法による非線形問題の探究」
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yuki Naito
2. 発表標題 Singular sextremal solutions for supercritical elliptic equations in a ball
3. 学会等名 Equadiff2017 (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 内藤 雄基
2. 発表標題 Asymptotic behavior of global solutions for semilinear heat equations with slowly decaying initial data
3. 学会等名 愛媛大学における微分方程式セミナー
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yuki Naito
2. 発表標題 Asymptotically self-similar behavior of global solutions to semilinear heat equations
3. 学会等名 Qualitative Theory on Nonlinear Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yuki Naito
2. 発表標題 Asymptotically self-similar behavior of global solutions to semilinear heat equations
3. 学会等名 Nonlinear Analysis, PDEs, and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 内藤雄基
2. 発表標題 Singular extremal solutions for supercritical elliptic equations in a ball
3. 学会等名 HMAセミナー・冬の研究会 2018
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 内藤雄基
2. 発表標題 A shooting approach to backward self-similar solutions for semilinear heat equations
3. 学会等名 RIMS共同研究「非線形問題への常微分方程式の手法によるアプローチ」
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 内藤雄基
2. 発表標題 Asymptotic behavior of global solutions for semilinear heat equations with slowly decaying initial data
3. 学会等名 日本数学会2018年度年会 関数方程式分科会
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担 者	猪奥 倫左 (Ioku Norisuke) (50624607)	東北大学・理学研究科・准教授 (11301)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------