様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　３ 年　 ６ 月 １５ 日現在

機関番号： ３２６６０
研究種目： 基盤研究(C)（一般）
研究期間： 2017～2020
課題番号： １７Ｋ０５３３７

研究課題名（和文）汎関数に対する種々の増大度条件の下での変分問題の研究

研究課題名（英文）Research on the variational problems under various growth conditions on the functionals

研究代表者
立川　篤（Tachikawa, Atsushi）

東京理科大学・理工学部数学科・嘱託教授（非常勤）

研究者番号：５０１８８２５７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：本研究の主たる目的は，変分問題の解の正則性に関して新たな結果を得ることである.変分問題とは，考えている「量」の最小点（もしくはより一般に極値や停留点）を与える写像・関数を求める問題を言う．石鹸膜等身近な多くの形が変分問題の解となっている.
変分問題を数学的に扱う場合，連続，更には微分可能な関数の中で，いきなり解の存在を示すことは一般に困難で，ソボレフ空間と呼ばれる「弱い意味で微分可能」な関数の空間の中で，弱い意味での解「弱解」の存在を示し，さらにその「弱解」の微分可能性等を示すというプロセスを辿ることが多い．本研究ではこの後半のプロセスの問題について，新たな結果を得ることができた.

研究成果の学術的意義や社会的意義
一般に非線型偏微分方程式に対して，ソボレフ空間（弱い意味での導関数がp-乗可積分である関数の空間）における解，すなわち弱解の存在は比較的容易に示されることが多く，むしろ存在が保証された弱解が，そもそもの問題にとって適切な滑らかさ（連続性，微分可能性）を持つことを示す点に難しさがある場合が多い．このような弱解の滑らかさに関数問題を「正則性の問題」と呼んでいる．本研究では，変分問題の解に対してこの「滑らかさの問題」を扱い，新たな結果を得た.
本研究で扱った問題は，近年ヨーロッパを中心に，その応用も含めて盛んに研究されている分野であり，この分野で新たな結果を得た意義は小さくない.

研究成果の概要（英文）：The aim of this research is to obtain new results about regularity of solutions for variational problems. We call the problems to obtain minimum point (or more generally, critical points and stationary points) as variational problems. Many familiar shapes such as soap films are the solution to the variational problem.
When dealing with variational problems mathematically, it is generally difficult to directly show the existence of a solution in the class of continuous or even differentiable functions. So, in many cases, we follow the process showing the existence of "weak solutions" which solve the problem in some weak sense in Sobolev spaces; spaces of "weakly differentiable" functions, and then showing the differentiability of the weak solutions. In this research, we considered the second process and have obtain several new results.

研究分野： 変分問題

キーワード： 変分問題　弱解の正則性　p(x)-growth　Φ-growth　double phase functional

1　研究開始当初の背景

本研究は変分問題の解の正則性に関するものである．変分問題の解の正則性に関する問題は，1900 年の有名な Hilbert の問題の 1 つとして提唱されて依頼，長くに渡って研究の対象となってきた．もちろん 100 年を超す歴史の中で多くの問題が解決され，特に Hilbert が提唱した問題そのものはすでに解決されている．しかし，数学，とりわけ偏微分方程式論と関数解析学の発展にともない，また新たな枠組みでの「変分問題の解の正則性の問題」が現れ，今日に至るまで，研究対象が尽きることはなく，依然として多くの研究者によって研究が進められている．

本研究の背景を述べるために，いくつかの記号，用語の準備をしておく．以下，$m, n \geq 2$ とし，$\Omega \subset \mathbb{R}^m$ を領域（境界条件を考えるときは十分滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つとする．関数 $F : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{mn} \to \mathbb{R}$ を与え，関数 $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ に対して汎関数 $\mathcal{F}(u)$ を $\mathcal{F}(u) := \int_\Omega F(x, u, Du)dx$ により定義する．ただし，$Du = (D_\alpha u^i) = (\frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha})$ とし，$F(x, u, \xi) : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{mn} \to \mathbb{R}$ に対しては，各変数に関する適当な滑らかさを仮定しておく．さらに $\xi(= Du)$ に関する増大度に対して，growth condition と呼ばれる次の条件を考える: ある定数 $0 < \lambda \leq \Lambda$, $1 \leq p \leq q$ に対し，次を満たす．

$$\lambda|\xi|^p \leq F(x, u, \xi) \leq \Lambda(1 + |\xi|^q) \qquad (\forall(x, u, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{mn}). \tag{1.1}$$

ただし，$|\ \ |$ は Euclidean norm を表す．$p = q$ の時に **standard growth** もしくは ***p*-growth**，それ以外の場合を **nonstandard growth** と呼ぶ．汎関数 $\mathcal{F}$ に対する変分問題，すなわち最小点（もしくは，より一般に停留点）となる関数を求める問題を扱う際，適当な Sobolev 空間での解（弱解）を求め，さらにその弱解が「問題が要求するレベルまで微分可能」であることを示すという方法が採られることが多い．特に，この後半のステップは**弱解の正則性の問題**と呼ばれ，しばしば困難な問題となる．さらに，$n \geq 2$ の場合に対しては，定義域全体での正則性に対していくつか反例が知られており，**部分正則性（Hausdorff 次元の小さな集合を除いた領域での正則性）**を目標に研究されることが多い．

standard growth の問題は，調和写像や極小曲面等に代表され，古くから多くの研究者の興味の対象となっていた．一方，non-standard growth の問題は比較的歴史が浅く，1989 年に発表された P.Marcellini[6] の論文において初めて登場し，研究開始当初はもちろん，今日でも未解決な部分が広く残されており，盛んに研究されている．

non-standard growth の問題のうち，本研究で扱った問題は以下のような 2 つのタイプである．

- **(A)** (**$p(x)$-growth**)：(1.1) において $p = q = p(x)$ とした条件を満たす場合を **$p(x)$-growth** と言い，Zhikov[10] により，汎関数

  $$\mathcal{D}_{p(x)}(u) := \int_\Omega |Du|^{p(x)}dx$$

  が扱われて以来，盛んに研究されている．

  - **(A-1)【$p(x)$ が連続な場合】**：一般形に対しては，Acerbi, Mingione 等により，minimizer u が，$\mathcal{L}^m(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$ ($\mathcal{L}^m$ は Lebesgue 測度) を満たす開集合 $\Omega_0 \subset \Omega$ に対して，$u \in C^{1,\alpha}(\Omega_0)$ を満たすことが示され，Coscia-Mingione[2] により，$\mathcal{D}_{p(x)}$ に対して，minimizer u の定義域全体での正則性，すなわち $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ となることが示された．さらに，本研究の代表者・立川らは，研究開始当初の時点で **$p(x)$-energy** の minimizer の部分正則性に関して，standard growth の場合とほぼ同等の結果示していた（「研究業績」欄 [1,2,8,11,12]）．ここで，$p(x)$-energy とは，一様楕円性条件を満たす $A_{ij}^{\alpha\beta}(x, u)$ に対して，$e(u)(x) := A_{ij}^{\alpha\beta}(x, u)D_\alpha u^i(x)D_\beta u^j(x)$ とおき，$\mathcal{E}_{p(x)}(u) := \int_\Omega \big(e(u)\big)^{p(x)/2}dx$ と定義される汎関数を指す．
  - **(A-2)【$p(x)$ が不連続な場合】**：最も単純な $\mathcal{D}_{p(x)}$ の場合でも，一般には正則性が得られないことが Zhikov による反例により知られているが，2016 年 Colombo-Mingione[1] により，指数が不連続的に変化する極めて興味深い汎関数

    $$\mathcal{A}_{p,q}(u) := \int_\Omega (|Du|^p + a(x)|Du|^q)dx \ (1 < p < q,\ a(x) \geq 0)$$

の minimizer に対する正則性が得られていた．研究開始当初では，このタイプの汎関数の研究は端緒についたばかりの状況であったが，その後，多くの研究者が研究し始め，関連する文献は爆発的と表現したくなるほどの勢いで増え続けている．なお，このタイプの汎関数は Double phase タイプと呼ばれ，$p(x)$-growth の特別な場合というよりも，独立した分類として扱われている．

- **(B)(Φ-growth)**：Δ_2-及び ∇_2- 条件を満たす N-**関数** Φ を用いて

$$\mathcal{D}_\Phi(u) := \int_\Omega \Phi(|Du|)dx$$

により与えられる汎関数に対する変分問題の研究が，対応する Orlicz-Sobolev 空間の研究とともに進んでいる．ここで，関数 $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ が N-関数であるとは，$\Phi(0) = 0$ を満たし，右連続・非減少な導関数 Φ' が存在し，$\Phi'(0) = 0$，$\Phi'(t) > 0 \ \ (t > 0)$，さらに $\lim_{t\to\infty} \Phi'(t) = \infty$ を満たすことを言う．また，$\Phi(2t) \le c_1\Phi(t)$ がすべての $t \ge 0$ に対して成り立つような定数 $c_1 > 0$ が存在するとき，Δ_2-条件を満たすと言う．さらに Φ の双対関数

$$\Phi^*(t) := \int_0^t \left(\Phi'\right)^{-1}(s)ds$$

も Δ_2-条件を満たすとき Φ は「∇_2-条件を満たす」と言う．

$\mathcal{D}_\Phi$ のような汎関数は Φ-growth という（やや苦し紛れな）名称で呼ばれている．Φ-growth の汎関数に対する変分問題がかなり整備された形で扱われたのは [7]，[3] であり，それ以後，L.Diening, A.Verde, B.Stroffolini, A.Passarelli di Napoli 等によって系統的に数々の結果が得られていた．

上で紹介した結果は，立川等による $p(x)$-growth の問題に対するもの以外すべて，汎関数を定義する被積分関数 $f(x,u,Du)$ が $g(x,u,|Du|)$ という形のものに限られていた．これは今日では **Uhlenbeck structure** と呼ばれている．

以上が，本研究で扱った問題に関する研究開始当初の背景である．

2 研究の目的

一般に Uhlenbeck structure を持つ $\int F(x,|Du|)dx$ という形の汎関数に対して minimizer の正則性が得られた場合，自然な一般化である $\int F(x,e(u)^{1/2})dx$ に対しては部分正則性が得られることが期待できる．実際，**(A-1)** のケースではこのようになっている．しかし，**(A-2)** 及び **(B)** の場合に対しては，本研究開始時点では，$\int F(x,|Du|)dx$ という形の汎関数に対してしか minimizer の正則性に関する結果は得られていない．本研究では当初，まさにこの点に注目し，以下のような形で与えられる汎関数の minimizer の部分正則性を得ること目標とした．但し，以下において Φ は常に，前述の Δ_2-条件を満たす N-関数とする．

$$\mathcal{E}_\Phi(u) := \int \Phi(e(u)^{1/2})dx,$$
$$\mathcal{G}_{p,q}(u) := \int g(x,u)\big(|Du|^p + a(x)|Du|^q\big)dx, \quad (a(x) \ge 0,\ g(x,u) > 0).$$

しかし，とりわけ $\mathcal{G}_{p,q}$ のような double phase タイプの問題に関して，海外の研究者，特に現在この分野の中心人物とも言える G.Mingione との議論を通じて，次の汎関数が極めて興味深く，優先的に取り組むべきとの認識に達した．

$$\mathcal{D}_{p(x),q(x)}(u) := \int \left(|Du|^{p(x)} + a(x)|Du|^{q(x)}\right)dx, \quad (q(x) > p(x) > 1, \quad a(x) \ge 0).$$

結局，本研究においては $\mathcal{E}_\Phi(u)$ に対する部分正則性と，$\mathcal{D}_{p(x),q(x)}(u)$ に対する正則性の研究を主たる目的として研究を進めることとなった．

3　研究の方法

一般に，変分問題の解の正則性を得るために Morrey タイプもしくは Campanato タイプの積分量を評価する方法が取られることが多い．すなわち，適当な $p, \lambda > 0$ に対して

$$r^{-\lambda}\int_{B_r(y)} |Du|^p dx \quad (\text{Morrey}), \qquad r^{-\lambda}\int_{B_r(y)} |u-u_r|^p dx \quad (\text{Campanato})$$

と定義される量を評価することにより，u のヘルダー連続性が示される．ただし，ここで

$$u_r := \fint_{B_r(y)} u(x)dx := \frac{1}{|B_r|}u(x)dx, \qquad |B_r| := B_r\text{のルベーグ測度}.$$

上記の式中の p と λ は，対象としている汎関数に適した値を選択する必要があり，p-growth の問題ではほとんど選択余地がなく決まってくる．一方，本研究で扱うような汎関数では，これらの選択が必ずしも自明ではない．特に，growth order が点に依存する $\mathcal{D}_{p(x),q(x)}(u)$ に対しては，上の量に現れる p も積分領域の $B_r(y)$ に対応して

$$p = \sup_{B_R(y)} p(x)$$

と取る必要があり，評価の複雑さ・困難さの要因となった．

4　研究成果

$\mathcal{E}_\Phi(u)$ に関して，Napoli 大・F.Giannetti, A.Passarelli di Napoli との共同研究によって，内部部分正則性，さらには境界上での正則性に関する結果を得た．また，$\mathcal{D}_{p(x),q(x)}$ に対しては，Catania 大・M.A.Ragusa との共同研究により内部正則性を，また立川単独の研究により，境界上での正則性を得ることができた．これらの結果について以下においてやや詳しく述べる．

4.1　Φ-growth functional について

Φ は前記のように Δ_2-条件，∇_2-条件を満たす N-関数とする．また，$A_{ij}^{\alpha\beta}(x,u)$ $(m \geq \alpha, \beta \geq 1,\ n \geq i, j \geq 1)$ を $\Omega \times \mathbb{R}^n$ 上で定義された関数で，ある $\Lambda \geq \lambda > 0$ に対して

$$\Lambda|\xi|^2 \geq A_{ij}^{\alpha\beta}(x,u)\xi_\alpha^i\xi_\beta^j \geq \lambda|\xi|^2 \quad \forall(x,u,\xi) \in \omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{mn}.$$

を満たし，さらに x, u に関して適当な連続性，微分可能性等の条件を満たすと仮定する．これらの条件のもと次の汎関数を考えた：

$$\mathcal{E}_\Phi(u;K) = \int_K \Phi\big((A_{ij}^{\alpha\beta}(x,u)D_\alpha u^i D_\beta u^j)^{1/2}\big)dx, \quad (K \subset \Omega).$$

F.Giannetti, A.Passarelli di Napoli との共同研究ではこのタイプの汎関数を扱い，まず，[5] では local minimizer，すなわち，

$$\mathcal{E}_\Phi(u;K) \leq \mathcal{E}_\Phi(u+\varphi; \mathrm{supp}\varphi) \quad \forall\varphi \in C_0^1(\Omega).$$

となる u について，次のような部分正則性に関する結果を示した：

> 「ある開集合 $\Omega_0 \subset$ に対して $u \in C^{1,\alpha}(\Omega_0)$ となる．さらに，$\Omega \setminus \Omega_0$ のハウスドルフ次元は $m-p$ 未満である．ただし，p は $\Phi(t) \geq ct^p$ $(c:$ 定数$)$ を満たす 1 より大きな定数である．（このような p の存在は Φ に対する条件より導かれる）．」

さらに，[4] では $\mathcal{E}_\Phi$ に対する Dirichlet 境界値問題を扱い，境界値が十分滑らかであれば，minimizer は境界上に特異点を持たないことを示した．

4.2 変動指数を持つ double phase functional について

まず，M.A.Ragusa との共同研究 [8] において，前出の $\mathcal{D}_{p(x),q(x)}(u)$ を扱い，次のような結果を得た：

「ある $\sigma \in (0,1)$ に対して，$p(\cdot), q(\cdot) \in C^{0,\sigma}(\Omega)$ とし，ある定数 $p_0 > 1$ に対して $q(x) \geq p(x) \geq p_0$ ($\forall x \in \Omega$ を満たしていると仮定する．また，ある $\alpha \in (0,1)$ に対して $a \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ であり，$a(x) \geq 0$ とする．さらに $p(x), q(x)$ は

$$\sup_{x\in\Omega} \frac{q(x)}{p(x)} < 1 + \frac{\beta}{n}, \qquad \beta = \min\{\alpha, \sigma\}, \tag{4.2}$$

を満たすとする．このとき，$\mathcal{D}_{p(x),q(x)}(u)$ の local minimizer u はある $gamma \in (0,1)$ に対して $u \in C^{1,\gamma}(\Omega)$ となる．」

これは Colombo-Mingione[1] の結果の自然な一般化となっており，高い評価を得た．実際，出版から 1 年半ほどの今日現在（2021 年 6 月 1 3 日）までの間にすでに被引用数は 80 となっている（Scopus によるデータ）．

さらに，立川による単著論文 [9] においては，$u \in L^\infty$ であることが予め分かっている場合には，上記の結果において条件 (4.2) を $\sup(q(x) - p(x)) < \beta$ と弱められることを示し，十分滑らかな Diruchlet 境界条件を満たす場合には，minimizer u が Ω の閉包 $\bar{\Omega}$ 上でヘルダー連続となることを示した．なお，double phase タイプの問題に対して境界まで込めた連続性に関する結果はこの結果が初めてであった．

参考文献

[1] Maria Colombo and Giuseppe Mingione. Regularity for double phase variational problems. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 215(2):443–496, 2015.

[2] Alessandra Coscia and Giuseppe Mingione. Hölder continuity of the gradient of $p(x)$-harmonic mappings. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 328(4):363–368, 1999.

[3] Lars Diening and Frank Ettwein. Fractional estimates for non-differentiable elliptic systems with general growth. *Forum Math.*, 20(3):523–556, 2008.

[4] Flavia Giannetti, Antonia Passarelli di Napoli, and Atsushi Tachikawa. Partial and full boundary regularity for non-autonomous functionals with Φ-growth conditions. *Forum Math.*, 31(4):1027–1050, 2019.

[5] Flavia Giannetti, Antonia Passarelli di Napoli, and Atsushi Tachikawa. Partial regularity results for non-autonomous functionals with *Φ*-growth conditions. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 196(6):2147–2165, 2017.

[6] Paolo Marcellini. Regularity of minimizers of integrals of the calculus of variations with nonstandard growth conditions. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 105(3):267–284, 1989.

[7] Paolo Marcellini and Gloria Papi. Nonlinear elliptic systems with general growth. *J. Differential Equations*, 221(2):412–443, 2006.

[8] Maria Alessandra Ragusa and Atsushi Tachikawa. New challenges on the regularity of minimizers of functionals. *J. Convex Anal.*, 25(2):675–690, 2018.

[9] Atsushi Tachikawa. Boundary regularity of minimizers of double phase functionals. *J. Math. Anal. Appl.*, 501(1):123946, 2021.

[10] Vasiliĭ V. Zhikov. On some variational problems. *Russian J. Math. Phys.*, 5:105–116, 1997.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計6件（うち査読付論文　6件／うち国際共著　5件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Tachikawa Atsushi	４．巻 501
２．論文標題 Boundary regularity of minimizers of double phase functionals	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jmaa.2020.123946	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Giannetti Flavia、Passarelli di Napoli Antonia、Tachikawa Atsushi	４．巻 31
２．論文標題 Partial and full boundary regularity for non-autonomous functionals with Φ-growth conditions	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Forum Mathematicum	６．最初と最後の頁 1027～1050
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/forum-2019-0039	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

１．著者名 Ragusa Maria Alessandra、Tachikawa Atsushi	４．巻 9
２．論文標題 Regularity for minimizers for functionals of double phase with variable exponents	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Advances in Nonlinear Analysis	６．最初と最後の頁 710～728
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/anona-2020-0022	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

１．著者名 Maria Alessandra Ragusa, Atsushi Tachikawa	４．巻 25
２．論文標題 New challenges on the regularity of minimizers of functionals	５．発行年 2018年
３．雑誌名 JOURNAL OF CONVEX ANALYSIS	６．最初と最後の頁 675--690
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Falvia Giannetti, Antonia Passarelli di Napoli, Atsushi Tachikawa	4．巻 196
2．論文標題 Partial regularity results for non-autonomous functionals with Φ-growth conditions	5．発行年 2017年
3．雑誌名 Annali di Matematica Pura ed Applicata. Series IV	6．最初と最後の頁 2147--2165
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10231-017-0658-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Giannetti Flavia、Passarelli di Napoli Antonia、Ragusa Maria Alessandra、Tachikawa Atsushi	4．巻 56
2．論文標題 Partial regularity for minimizers of a class of non autonomous functionals with nonstandard growth	5．発行年 2017年
3．雑誌名 Calculus of Variations and Partial Differential Equations	6．最初と最後の頁 Art. 153, 29
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00526-017-1248-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計2件（うち招待講演　2件／うち国際学会　1件）

1．発表者名 Atsushi Tachikawa
2．発表標題 Some regularity results for energy minimizing maps into Finsler manifolds
3．学会等名 Seminario di Analisi （ナポリ大学における公開セミナー）（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2017年

1．発表者名 立川　篤
2．発表標題 Partial regularity results for minimizers of a class of functionals with nonstandard growth
3．学会等名 松山解析セミナー２０１８（招待講演）
4．発表年 2018年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究協力者	ラグーサ　マリア・アレッサンドラ (Ragusa Maria Alessandra)	カターニア大学（イタリア）	
研究協力者	パッサレッリ・ディ・ナポリ　アントニア (Passarelli di Napoli Antonia)	ナポリ「フェデリコ２世」大学	
研究協力者	ジァンネッティ　フラヴィア (Giannetti Flavia)	ナポリ“ェデリコ２世“大学	
連携研究者	長澤　壯之 (Nagasawa Takeyuki) (70202223)	埼玉大学・理工学研究科・教授 (12401)	

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
イタリア	Napoli Federico II世 大学	Catania大学		