

令和 3 年 6 月 30 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K05338

研究課題名(和文) 消散型非線形双曲型方程式の解の漸近挙動

研究課題名(英文) Asymptotic behavior of solutions of dissipative hyperbolic equations

研究代表者

山崎 多恵子 (Yamazaki, Taeko)

東京理科大学・理工学部数学科・教授

研究者番号：60220315

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,500,000円

研究成果の概要(和文)：定数係数の消散項のある線形波動方程式の解は対応する放物型方程式の解に漸近することが知られ、拡散現象と呼ばれている。変数係数の時には、消散項の係数の減衰度に応じて漸近挙動が異なる。

本研究では、定数係数で消散項が周波数の分数巾に依存する構造的消散項を持つ半線形消散型波動方程式および主部及び消散項が時間に依存する係数を持つ抽象線形波動方程式について拡散現象を示した。一方、時間減衰が速い消散項をもつKirchhoff型準線形波動方程式に対する波動作用及び散乱作用素の連続性を示し、特に消散項の係数が単調減少のときには、漸近自由となるための必要十分条件を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

消散項が周波数の分数冪に依存する構造的消散項をもつ波動方程式に関する大域解の一意存在性に関して先行研究で置かれていた冪と空間次元の関係に対する制限を外したことにより、統一的な結果を得ることができた。主部及び消散項が変数係数の場合についての拡散現象を示したことは、今後準線形方程式にも応用できることが見込まれる。また、Kirchhoff型準線形波動方程式の漸近自由となるための必要十分条件が線形方程式と異なることを示すことにより、半線形と準線形の違いを明確にした。

研究成果の概要(英文)：It is known that solutions of linear wave equation with constant dissipation tend to solutions of corresponding parabolic equation, which is called diffusion phenomenon.

Asymptotic behavior of solutions of wave equation with dissipative term of variable coefficients, depend on decay order of coefficient. On this research, we showed diffusion phenomenon of semilinear wave equation with constant structural dissipation and dissipative wave equation with time dependent coefficients of principal part and dissipative term. On the other hand, we showed continuity of wave operator and scattering operator on quasilinear dissipative wave equation of Kirchhoff type. Especially in the case that the coefficient of dissipative term is monotone decreasing, we obtained necessary and sufficient condition for the solution to be asymptotically free.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：消散型波動方程式

1 研究開始当初の背景

消散項のある波動方程式は、消散項が効果的に働く条件下では、方程式の解は放物型方程式の解に漸近することが知られており、拡散現象と呼ばれている。この現象について、線形、非線形、変数係数をもつ消散項、周波数の分数冪に依存する構造的消散項など、様々な設定の下、多く研究されていた。消散項の係数が時間変数に依存する場合には、係数の時間減衰の速さにより現象が異なる。減衰が速く可積分となる場合は時間減衰が速いため消散項の効果が弱く、線形消散型波動方程式の解は自由な波動方程式の解に時間無限大で漸近することが知られていた。減衰が速くないときには消散項が効果的に働き、拡散現象について、研究代表者は抽象的消散波動方程式に対して 2006 年に示し、それとは独立に Wirth が 2007 年に具体的な方程式について示した。

周波数の分数冪に依存する構造的消散項を持つ構造的消散波動方程式についても研究されるようになっており、線形方程式に関しては拡散現象が、半線形方程式に関しては空間次数と周波数の冪との関係における制限のもと、大域解の存在が知られていた。

準線形方程式は線形方程式とは異なる現象が起きる。以前研究代表者は散乱作用素の存在のための十分条件について考察したが、必要条件については、消散項の係数が時間減衰する Kirchhoff 型準線形波動方程式の解が漸近自由となるためには、線形方程式における十分条件である拡散項の係数の可積分性だけでは不十分で、さらに時間変数をかけたものが可積分である必要があることを、2015 年に示した。

2 研究の目的

(1) 周波数の分数冪に依存する弱い構造的消散項を持つ半線形構造的消散波動方程式について、先行研究で置かれていた空間次数と周波数の冪との関係における制限を外して、大域解の一意存在を示す。さらに漸近系を与え拡散現象を示す。

(2) 減衰しうるが単調とは限らない時間依存の係数をもつ消散項をもつ抽象線形双曲型波動方程式について、拡散現象が起こるための係数に対する十分条件を先行研究より弱め一般化し、主部の係数も時間依存の場合に拡張する。

(3) 消散項の係数が時間減衰する Kirchhoff 型準線形波動方程式の解が漸近自由であるための以前考察した十分条件を精密化し、適当な仮定下では、研究代表者が既に示していた必要条件に一致することを示す。さらに波動作用素および散乱作用素の連続性を示す。

3 研究の方法

(1) 構造的消散項を持つ半線形構造的消散波動方程式について、先行研究では解の L^p 有界性を用いていることによる次元と周波数の冪との関係における制限があったが、本研究では重み付き Sobolev 空間を含むような重み付き Lorentz 空間で考察することにより、その点について回避できた。しかし、消散項が周波数の分数べきに比例する場合には、低周波における線形方程式の基本解が周波数が原点の近くで特異性を持つことが、別の困難さを生じさせる。先行研究では解のベッセル関数による具体的な解表示を用いて低周波領域の評価を与えていたが、本研究では Fourier 解析の手法を用いて重み付き Lorentz 空間で考察し、低周波を評価した。

(2) 消散項が効果的に働く線形波動方程式の拡散現象について、研究代表者が2006年に証明した時の証明では解の低周波部分と高周波部分を分けて評価していたが、本研究では2006年で用いた方法とともに、低周波部分の評価に連携させて高周波部分を評価した。

(3) 波動作用素および散乱作用素の連続性に関しては、考える関数空間が重要になるため、適切な関数空間を設定した。

4 研究成果

(1) 先行研究で課されていた空間次元と消散項の周波数に対する冪との関係における条件なしに、構造的消散項をもつ半線形波動方程式の重み付き Sobolev 空間における小さい初期値に対する大域解の一意存在を示した。次に、初期値が重み付き可積分関数となる小さい初期値である時に、上記で示した大域解の漸近形が対応する放物型方程式の基本解の定数倍で与えられることを示した。これらの結果は *Nonlinear Differential Equations and Applications* に掲載された。

(2) ヒルベルト空間上での主部および消散項が時間に依存する抽象波動方程式の拡散現象について、拡散現象が起きるための主部および消散項の係数に関する十分条件を与えた。この条件は、主部の係数が定数であっても、先行研究における拡散現象が起こるための消散項の係数の十分条件より、減衰条件を弱め、さらに一般化した。また、Radu, Todorova and Yordanov (2011) は定数係数の抽象消散型波動方程式の解と対応する放物型方程式の解の差を放物型方程式の解に時間減衰の関数をかけたもので評価し拡散現象を示したが、本研究でも同様な評価を与え、対応する放物型方程式よりも差の減衰評価の方が速いことを示した。さらに、ユークリッド空間上での消散項のある波動方程式については、上記の結果から、 $L_p - L_q$ 評価を導いた。これらの結果は *Asymptotic Analysis* で Web 上公開されている。

(3) 消散型 Kichhoff 型波動方程式に関して、漸近自由であるための十分条件を示し、特に消散項の係数が単調減少であるときには、すでに研究代表者が示していた必要条件の結果と合わせて、消散項に時間変数をかけたものが可積分であることが漸近自由であるための必要十分条件となることをが分かった。さらに適切なクラスの上で、波動作用素および散乱作用素の連続性を示した。これらの結果は *Osaka Journal of Mathematics* に掲載された。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Taeko Yamazaki	4. 巻 54
2. 論文標題 Scattering for quasilinear hyperbolic equations of Kirchhoff type with perturbation	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Osaka J. Math.	6. 最初と最後の頁 287--322
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Taeko Yamazaki	4. 巻 26:16
2. 論文標題 Asymptotic profile of solutions for semilinear wave equations with structural damping	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Nonlinear Differential Equations and Applications	6. 最初と最後の頁 1-43
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00030-019-0562-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Taeko Yamazaki	4. 巻 -
2. 論文標題 Diffusion phenomenon for abstract linear wave equations with time decaying coefficients of propagation and dissipation	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Asymptotic Analysis	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3233/ASY-201665	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 3件/うち国際学会 2件）

1. 発表者名 山崎多恵子
2. 発表標題 Asymptotic profile of solutions for semilinear wave equations with structural damping
3. 学会等名 応用解析研究会（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山崎多恵子
2. 発表標題 Asymptotic profile of solutions for semilinear wave equations with structural damping
3. 学会等名 Workshop: Critical exponent and nonlinear evolution equations 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Taeko Yamazaki
2. 発表標題 Global existence and asymptotic prole of solutions to semilinear wave equations with structural damping
3. 学会等名 Hyperbolic Partial Differential Equations and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------