

令和 2 年 5 月 30 日現在

機関番号：14501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K05345

研究課題名(和文)ジェネリック構造とその自己同型群の研究

研究課題名(英文)Study of generic structures and their automorphism groups

研究代表者

桔梗 宏孝 (Kikyo, Hirotaka)

神戸大学・システム情報学研究科・教授

研究者番号：80204824

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：0と1の間の実数をパラメタにHrushovskiは有限グラフのクラスを定義し、その極限として等質性をもつ可算構造を構成した。これをジェネリック構造と呼ぶ。これにはWagnerの修正版がある。Wagnerの修正版にはHrushovskiの本来の構造は含まれない。パラメタが有理数の場合、どちらの場合もジェネリック構造が満たす完全な公理系はモデル完全になることが示せた。同じ仮定のもとで、どちらの場合もジェネリック構造の自己同型群が単純群になることが示せた。パラメタが普通の無理数の場合はジェネリック構造の満たす完全な公理系はモデル完全にならないこともわかった。無理数一般についてはどちらも未解決である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

有限単純群の分類が終わったあと、無限な単純群も考えられるようになった。可算ランダムグラフの自己同型群が単純群であることが証明され、自由融合性をもつ有限構造のクラスに対するFraïssé極限など等質性の高い可算構造の自己同型群が単純群になることも次第に一般的な仮定のもとで示されるようになってきた。Evans, Tentらにより、Wagnerの修正版についてパラメタが $1/2$ のときに、ジェネリック構造の自己同型群の単純性が示されている。われわれの研究により、パラメタが任意の有理数の場合にもHrushovskiの本来の場合も含めて自己同型群が単純になることがわかった。

研究成果の概要(英文)：Hrushovski defined a class of finite graphs depending on a parameter whose value is a real number between 0 and 1. Each class has a limit which is a countably infinite structure, called a generic structure. It is highly homogeneous in some sense. There are variants due to Wagner. Hrushovski's original structures are not variants due to Wagner. In case that the parameter is a rational number, we showed that the elementary theory of the generic structure is model complete in both cases. Also, we showed that the automorphism group of the generic structure is a simple group if the parameter is a rational number. If the parameter is a usual irrational number then the theory of the generic structure is not model complete. The problems are still open if the parameter is a general irrational number.

研究分野：モデル理論(数理論理学)

キーワード：無限単純群 ジェネリック構造 モデル完全 自己同型群 Hrushovskiの融合法 Fraïssé極限

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

有限単純群の分類が終わったあと、無限な単純群の分類も考えられている。有限単純群はそれほど種類がなく、特別ないくつかは有限グラフの自己同型群になっている。無限グラフの自己同型群がどのような群かは自然な問題と思える。少し古い結果では可算無限なグラフであるラムダムグラフ(ラドのグラフ)の自己同型群が単純群になることが証明されている。

Fraisse 極限やジェネリック構造と呼ばれる等質的な構造の構成法がある。その方法によって構成される構造の自己同型群が単純群になるという結果がいくつか証明されるようになった。Hrushovski は Fraisse の構成法をうまく修正してある予想の反例を構成した。Hrushovski は有限グラフのあるクラスがジェネリック構造をもち、それが反例になっていることを示した。この有限グラフのクラスを定義するために $1/2 < \alpha < 2/3$ を満たす実数 α から決まる境界関数 f を巧妙に与えた。この f の定義は少し難解なところがあり、Wagner がその解説論文の中で境界関数 f に関するある一般的な条件を導入し、Hrushovski が構成した反例と同様な反例が構成できることを示した。それ以来、Wagner の条件を仮定して議論されることがほとんどである。しかしながら Hrushovski の与えた境界関数は Wagner の条件をみたしていない。

パラメータ α が有理数の場合に得られるジェネリック構造の自己同型群が単純群になるための十分条件が Evans, Tent らにより 2016 年ごろ与えられた。彼らはその論文の中で $\alpha = 1/2$ でさらに境界関数が Wagner の条件をみたすという仮定のもとで確かに彼らが得た十分条件が満たされ、したがってジェネリック構造の自己同型群が単純群になることを示した。 α が 0 と 1 の間にある有理数の場合にもジェネリック構造の自己同型群が単純になるという予想もたてていた。

2. 研究の目的

有限構造のクラスから融合法と呼ばれる方法により面白い性質をもつ構造が構成されることが知られている。このように構成された構造のもつモデル理論的な性質や組合せ論的な性質を研究し、またその自己同型群についての研究も行う。特に、次の問題を考える。

- (1) 融合法で構成される構造はモデル完全か。また、モデル理論的な安定性のクラスは何か。
- (2) 融合法で構成される構造は組合せ論的にどんなものか。
- (3) 融合法で構成される構造の自己同型群はどんなものか。

3. 研究の方法

神戸大学の澤正憲准教授の協力を得て、「神戸モデル理論・組合せ論セミナー」を年に数回開催し、モデル理論と組合せ論の研究者をお呼びして研究会を開催した。また、ジェネリック構造の研究で近い研究をされている法政大学の池田宏一郎教授とも頻りに研究打ち合わせを行った。主に京都大学数理解析研究所でモデル理論の研究集會が開催された際に海外から研究者を招へいし、議論を行った。フライブルク大学の M. Ziegler 教授、ニューヨーク市立大学の P. Rothmaler 教授などに来日していただいた。また国際会議にも何度もかけて成果の発表、情報収集、参加者との議論を行った。

4. 研究成果

α を $0 < \alpha < 1$ となる実数とする。有限グラフ G に対し $|G|$ を頂点の個数、 $e(G)$ を辺の個数とする。次元関数 $\delta(G) = |G| - e(G)$ で与える。 δ は α に依存している。境界関数 f を対数関数のように上に凸、単調増加な関数とする。有限グラフのクラス K_f を

$$K_f = \{A \mid B \text{ が } A \text{ の部分グラフ ならば } \delta(B) \geq \alpha f(|B|)\}$$
 で定義する。

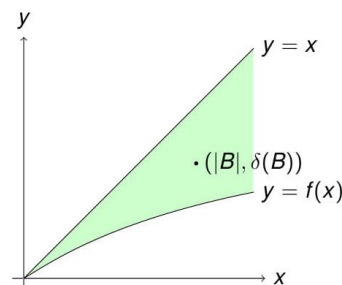
α が有理数で関数 f が Wagner の条件を満たすとき、 K_f はジェネリック構造(Fraisse 極限)をもつ。Hrushovski が定義した f に対しても K_f はジェネリック構造をもつ。 f は α に依存し、 α は実数であれば無理数でも有理数でもよい。

Hrushovski が構成した構造は、 α が特別な無理数の場合の K_f のジェネリック構造だった。

A, B を有限グラフとする。 $A \subseteq B$ で、 A と B の間のグラフ X が A の真の拡大のとき $(A) < (X)$ となるとき、 $A < B$ と書く。このとき A は B で閉という。

ジェネリック構造は $(K_f, <)$ に対する極限である。

$$K_f = \{A : \text{finite} \mid B \subseteq A \Rightarrow \delta(B) \geq \alpha f(|B|)\}$$



(1) α を $0 < \alpha < 1$ となる有理数とする。境界関数 f は区分的に滑らかで x で発散しているとする。また n からきまるある特別な n における $y=f(x)$ の接線の傾きがある特別な値以上とする。このとき $(K_f, <)$ のジェネリック構造はモデル完全な公理系をもつ。

この仮定は Hrushovski の関数でも Wagner の条件をみたす関数でも成り立つ。Wagner の条件を仮定してすでに証明していたことであるが、Hrushovski の関数を含むかなり一般的な境界関数についても成り立つことが示せた。

(2) を $0 < \alpha < 1$ となる有理数とし、 f を α から決まる Hrushovski の境界関数とする。このとき (Kf, α) のジェネリック構造の自己同型群は単純群になる。

(3) を $0 < \alpha < 1$ となる有理数とし、 f を Wagner の条件をみたす境界関数とする。このとき (Kf, α) のジェネリック構造の自己同型群は単純群になる。

Wagner の条件は $y = f(x)$ の傾きがどこでもわりと緩やかという意味の条件であるが、Hrushovski の境界関数は Wagner の条件をみたすほどは傾きが緩やかでない。これにより、Hrushovski の境界関数は Wagner の条件をみたす関数より早く増加する。 $x=2$ での値を考えると Hrushovski の関数の方がグラフが上に来る。このことから、(3) は (2) から導かれる。(2) の証明は Hrushovski の境界関数の定義とうまくからんでいるので、この流れはわりと自然だったと言える。

(2) の証明は α についてかなりたくさんの場合分けと細かい議論を要する。それでも大分整理できた。

(4) が $1/2$ のようなよくある無理数のとき、 f の連分数展開に現れる数 (整数) は有限種類しかない。このとき、Hrushovski の関数は有界になり、発散しない。このとき、 (Kf, α) のジェネリック構造はモデル完全な公理系をもたない。

(5) Hrushovski の論文で示されていることだが、 α が無理数でも境界関数 f が発散する場合はある。しかし、それは Baire の定理を使うので、かなりランダムな感じの実数になる。モデル完全性、自己同型群の単純性のどちらもいまだにわかっていない。

[参考文献]

[1] David M. Evans, Zaniar Ghadernezhad, Katrin Tent, Simplicity of the automorphism groups of some Hrushovski constructions, *Annals of Pure and Applied Logic* **167**, pp.22-48, 2016.

[2] Hirotaka Kikyo, Model completeness of generic graphs in rational cases, *Archive for Mathematical Logic* **57**, pp.769 - 794, 2017.

[3] Hirotaka Kikyo, Shunsuke Okabe, On Hrushovski's pseudoplanes, *Proceedings of the 14th and 15th Asian Logic Conferences*, pp.175 - 194. 2019.

[4] Hirotaka Kikyo, On the automorphism group of a Hrushovski's pseudoplane associated to $5/8$, *京都大学数理解析研究所講究録* **2119**, pp.75 - 86, 2019.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 6件）

1. 著者名 Hirota Kikyo; Masanori Sawa	4. 巻 41
2. 論文標題 Kohler theory for countable quadruple systems	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Tsukuba Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 189 ~ 213
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Hirota Kikyo	4. 巻 2084
2. 論文標題 Model completeness of the theory of Hrushovski's pseudoplane associated to 5/8	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 29 ~ 38
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Hirota Kikyo	4. 巻 2079
2. 論文標題 Balanced zero-sum sequences and minimal intrinsic extensions	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 54 ~ 60
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Kikyo, Hirota	4. 巻 57
2. 論文標題 Model completeness of generic graphs in rational cases	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Archive for Mathematical Logic	6. 最初と最後の頁 769 ~ 794
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00153-017-0601-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kikyo, Hirotaka	4. 巻 2119
2. 論文標題 On the automorphism group of a Hrushovski's pseudoplane associated to 5/8	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 75 ~ 86
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kikyo, Hirotaka; Okabe, Shunsuke	4. 巻 -
2. 論文標題 On Hrushovski's pseudoplanes	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the 14th and 15th Asian Logic Conferences	6. 最初と最後の頁 175 ~ 194
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/9789813237551_0009	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計11件 (うち招待講演 2件 / うち国際学会 4件)

1. 発表者名 Hirotaka Kikyo
2. 発表標題 On generic structures and their automorphism groups
3. 学会等名 Shanghai Model Theory Workshop 2017 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年 ~ 2018年

1. 発表者名 Hirotaka Kikyo
2. 発表標題 Model completeness of generic graphs in rational cases
3. 学会等名 The 15th Asian Logic Conference (国際学会)
4. 発表年 2017年 ~ 2018年

1. 発表者名 桔梗宏孝
2. 発表標題 Hrushovski の構成法による構造とその自己同型群の単純性について
3. 学会等名 離散数学とその応用研究集会2017
4. 発表年 2017年～2018年

1. 発表者名 桔梗宏孝
2. 発表標題 クラス K_f について
3. 学会等名 2017日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2017年～2018年

1. 発表者名 桔梗宏孝
2. 発表標題 On automorphism groups of generic structures
3. 学会等名 RIMS共同研究（公開型）モデル理論における独立概念と次元の研究
4. 発表年 2017年～2018年

1. 発表者名 桔梗宏孝
2. 発表標題 Hrushovski の <i>ab initio</i> 融合クラスについて
3. 学会等名 2018日本数学会年会
4. 発表年 2017年～2018年

1. 発表者名 桔梗宏孝
2. 発表標題 On automorphism groups of Hrushovski's pseudoplanes
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型)モデル理論における独立概念と次元の研究
4. 発表年 2018年~2019年

1. 発表者名 桔梗宏孝
2. 発表標題 On Hrushovski's pseudoplanes
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型)モデル理論における独立概念と次元の研究
4. 発表年 2019年~2020年

1. 発表者名 桔梗宏孝
2. 発表標題 有理数係数のHrushovskiの擬平面について
3. 学会等名 2019日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2019年~2020年

1. 発表者名 Kikyo, Hirotaka
2. 発表標題 On automorphism groups of Hrushovski's pseudoplanes in rational cases
3. 学会等名 Logic Colloquium 2019(国際学会)
4. 発表年 2019年~2020年

1. 発表者名 Kikyo, Hiroataka
2. 発表標題 On automorphism groups of Hrushovski's pseudoplanes in rational cases
3. 学会等名 Model Theory Workshop in Shanghai 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年～2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	池田 宏一郎 (Ikeda Koichiro)	法政大学・経営学部・教授	
研究協力者	澤 正憲 (Sawa Masanori)	神戸大学・大学院システム情報学研究所・准教授	