

令和 6 年 5 月 1 日現在

機関番号：32702

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2023

課題番号：17K05352

研究課題名(和文) 実数の特異部分集合と関数空間の局所的性質に関するScheepers予想の総合研究

研究課題名(英文) The study of Scheepers' conjecture on local properties of function spaces and special subsets of reals

研究代表者

酒井 政美 (SAKAI, MASAMI)

神奈川大学・理学部・教授

研究者番号：60215598

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、位相空間 $X$ の被覆的性質と各点収束位相を入れた関数空間 $C_p(X)$ の局所的性質との対応関係を問うScheepers予想、及びその周辺の問題を解決することであった。Scheepers予想に関連して次のような成果を得た。(1) 関数空間 $C_p(X)$ がprojective Mengerになるための必要十分条件を位相空間 $X$ の性質で与えて周辺の位相的性質との関係性を明らかにした、(2)  $C_p(X)$ と $C_p(Y)$ が線形位相同型で $X$ がMenger空間であるとき、 $Y$ もMengerになることを弱い局所的条件の下で証明して、Arhangel'skiiの未解決問題の部分解を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究期間ではScheepers予想の最終解決には至らなかったが、周辺の問題の解決に向けてはいくつかの進捗が得られ、今後の研究の進展に寄与すると思われる。特に、研究成果の概要で述べられた(2)の結果は、実数の部分集合の間ではMenger性は関数空間の間の線形同相で保存されることを示し、今後の研究方向を定めるうえで重要と思われる。

研究成果の概要(英文)：The purpose of this study was to solve Scheepers' conjecture on the relation between a topological property of  $X$  and a local property of the function space  $C_p(X)$  with the topology of pointwise convergence. Concerning Scheepers' conjecture, we obtained the following results. (1) we gave a characterization of  $X$  for  $C_p(X)$  to be projective Menger, and gave some implications of topological properties appeared in Scheepers' conjecture, (2) we showed that under some weak local property of  $X$  and  $Y$ , if  $C_p(X)$  and  $C_p(Y)$  are linearly homeomorphic and  $X$  is Menger, the  $Y$  is also Menger, where this is a partial answer to Arhangel'skii's problem.

研究分野：集合論的位相幾何学

キーワード：関数空間 Scheepers予想 Menger

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

M. Scheepers (集合論及び集合論的トポロジー ; Boise Univ. USA) は、Ramsey 理論や無限位相ゲーム理論の研究に端を発し、「Combinatorics of open covers」というタイトルの一連の論文を発表して現在 “Selection Principles in Mathematics” とよばれる一分野を創始した。

“Selection Principles in Mathematics” の分野は集合論と位相幾何学の交差する位置にあり、集合論の研究者と位相幾何学の研究者がともに興味をもつ結果が継続的に得られてきており、また興味深い多くの未解決問題が残されている状態であった。研究代表者の立場からは、これまでの関数空間  $C_p(X)$  と位相空間  $X$  の間の相互作用の研究の流れから自然に Scheepers 予想、及びその周辺問題に興味をもち、研究を開始することになった。

### 2. 研究の目的

Scheepers 予想とその周辺問題に関して、以下の問題を明らかにすることが目的であった。

(1) 実数の部分集合  $X$  が  $S_1(\ , \ )$  を満たす必要十分条件となる Pixley-Roy 超空間  $PR(X)$  の位相的性質は何か?  $X$  が開被覆に関する性質  $(P)$  を満たす必要十分条件となる Pixley-Roy 超空間  $PR(X)$  の位相的性質は何か?

(2) 集合論の強制法(forcing)や elementary submodel の手法を利用して、 $S_1(\ , \ )$  を満たさない実数の部分集合の新しい構成法はできないか?

(3) 関数空間  $C_p(X)$  が SSP を満たせば、 $X$  は (USC)s を満たすか? これが正しければ Scheepers 予想も ZFC で正しい。

(4) 実数の部分集合  $X$  が  $S_1(\ , \ )$  を満たすことと、sequential fan が  $C_p(X)$  に埋め込めないことはどれくらいの差があるのか?

### 3. 研究の方法

連携研究者の薄葉氏(早稲田大)は、集合論の強制法(forcing)等の手法を使い Scheepers 予想の反例を構成する立場で、連携研究者の山内氏(愛媛大)は Scheepers 予想を肯定的に解決する立場で、実数の部分集合の開被覆に関する性質を研究する計画であった。そのうえで、方向性として以下の方法で研究を進める予定であった。

- (1) Scheepers 予想を空間  $X$  上の上半連続関数列の準正規収束の問題と捉える方法、
- (2) 集合論の手法を利用して、Pixley-Roy 超空間で Scheepers 予想の反例を構成する方法、
- (3) sequential fan の  $C_p(X)$  への埋め込みと、 $C_p(X)$  の SSP との違いを比較する方法。

### 4. 研究成果

(1) “Selection Principles in Mathematics” の分野で Menger 空間は重要な研究対象であり、Menger 空間となる必要十分条件は projective Menger かつ Lindelof 空間であることが知られている。本研究では関数空間  $C_p(X)$  が projective Menger になるための必要十分条件を与え、また sequential fan が  $C_p(X)$  に埋め込めるための必要十分条件を与えた。応用として、Arhangel'skii の「 $C_p(X)$  が Menger 空間ならば、 $X$  は有限空間である」という定理の簡略な証明法を与えた。

(2) “Selection Principles in Mathematics” の分野で考察される selectively absolute star-Lindelof 空間について、absolute star-Lindelof であるが selectively absolute star-Lindelof でない空間の例を与え、2つの概念に差があることを示した。また、この空間の濃度は dominating number の  $d$  で与えられる。

( 3 ) monotone Lindelof 性を満たす位相空間の濃度は高々連続体濃度のベキ以下であることを示した。通常は Arhangel'skii の定理「Lindelof で第一可算公理を満たす位相空間の濃度は連続体の濃度以下である」のように位相空間の濃度は何らかの局所的性質がないと抑えられないが、monotone Lindelof 空間では局所的性質がなくても被覆の条件のみで空間の濃度が抑えられてしまうという意味で非常に興味深いと思われる。この結果は本研究課題とは直接的な関係はないが、本研究課題の研究の過程で得られた。

( 4 ) Bernal-Santos と Tamariz-Mascarua は位相空間  $X$  が零次元であるとき、関数空間  $C_p(X, 2)$  がいつ Menger 空間になるかを研究した。特に、位相空間  $X$  が距離空間、孤立点が一つしかない空間、generalized ordered 空間の場合についてその特徴づけを研究した。研究代表者は Bernal-Santos と Tamariz-Mascarua のいくつかの結果に対してその改良を与えた。例えば、Bernal-Santos と Tamariz-Mascarua は位相空間  $X$  が順序数の部分空間であるとき、 $C_p(X, 2)$  が Menger 空間になる必要十分条件は  $C_p(X, 2)$  が Lindelof 空間で  $X$  の derived set が countably compactであることを示したが、研究代表者はこの定理が一般の generalized ordered 空間でも成立することを証明して、より良い結果を与えた。

( 5 )  $C_p(X)$  と  $C_p(Y)$  が線形位相同型であるとき、 $X$  の多くの位相的性質が  $Y$  にも保存されることが知られている。Arhangel'skii は“Selection Principles in Mathematics”の分野で重要な Menger 空間について同様なことが成立するかを問題として提出している。研究代表者はこの問題に対して、位相空間に対して弱い局所的性質を仮定すれば、この問題は肯定的であることを証明した。例えば第一可算公理はこの弱い局所的条件を満たしているので、実数の部分空間の間では Arhangel'skii の問題は肯定的である。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Masami Sakai	4. 巻 281
2. 論文標題 The Menger property and l-equivalence	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.topol.2020.107187	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Masami Sakai	4. 巻 258
2. 論文標題 Remarks on the Menger property of $C_p(X,2)$	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 32-46
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.topol.2019.02.059	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Masami Sakai	4. 巻 52
2. 論文標題 A monotonically retractable realcompact space which is not Lindelof	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Topology Proceedings	6. 最初と最後の頁 95--99
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 F. Lin, S. Lin and Masami Sakai	4. 巻 44
2. 論文標題 Point-countable covers and sequence-covering maps	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Houston Journal Mathematics	6. 最初と最後の頁 385--397
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 M. Bonanzinga, M. Cuzzupe and Masami Sakai	4. 巻 221
2. 論文標題 On selective absolute star-Lindelofness	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 517--523
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2017.02.006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Masami Sakai	4. 巻 220
2. 論文標題 The projectively Menger property and an embedding of $S_w$ into function spaces	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 118--130
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2017.02.017	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 M. Bonanzinga, F. Cammaroto and Masami Sakai	4. 巻 225
2. 論文標題 Remarks on monotone (weak) Lindelofness	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 195--205
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2017.04.009	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計6件 (うち招待講演 4件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 Masami Sakai
2. 発表標題 The Menger property and $l$ -equivalence
3. 学会等名 Set-theoretic methods in topology and real functions theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masami Sakai
2. 発表標題 The Menger property of $C_p(X,2)$ and related matters
3. 学会等名 International conference ``Topological Algebra and Set-Theoretic Topology" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 酒井政美
2. 発表標題 On monotonically retractable spaces
3. 学会等名 一般位相幾何及び幾何学的トポロジーの現状と諸問題 (京都大学数理解析研究所)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Masami Sakai
2. 発表標題 The Menger property of $C_p(X,2)$
3. 学会等名 The 7-th workshop on topology in Zhanzhou, China (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Masami Sakai
2. 発表標題 Remarks on the Menger property of $C_p(X,2)$
3. 学会等名 Frontiers of selection principles, Warsaw, Poland (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Masami Sakai
2. 発表標題 A classification of Pixley-Roy hyperspaces
3. 学会等名 Iberoamerican Pan Pacific International Conference on Topology and Applications (国際学会)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	薄葉 季路 (Usuba Toshimichi) (10513632)	早稲田大学・理工学術院・教授  (32689)	
連携研究者	山内 貴光 (Yamauchi Takamitsu) (00403444)	愛媛大学・理工学研究科・教授  (16301)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------