

令和 4 年 6 月 27 日現在

機関番号：10107

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K05355

研究課題名(和文)不均質性をもつ非線形反応拡散系への変分法的アプローチによる数理解析

研究課題名(英文)Variational approach to pulse solutions in reaction-diffusion systems with spatial heterogeneity

研究代表者

寺本 敬 (Teramoto, Takashi)

旭川医科大学・医学部・教授

研究者番号：40382543

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：不均質媒体(ヘテロ環境)における空間局在解、特にヘテロ環境に特有な定常デフェクト解について、解の存在、安定性、分岐の問題について、作用汎関数を構成し、特異摂動論から構成した解の形状を用いて、汎関数を具体的に評価した。ジャンプ点が0(1)の距離の位置にあるデフェクト解の存在条件を、摂動展開の高次項の計算から導出した。本研究課題で整備した変分法的アプローチを進行座標系での問題に拡張し、多重連結進行パルス解の存在とそのサドルノード分岐について明らかにした。海外共同研究者らと連携し、数学的に設定した問題の実在性と有用性を、数値的に確認しながら相補的に取り組んだ。

研究成果の学術的意義や社会的意義

米国応用数学会主催の国際会議のミニシンポジウムを、研究期間内に2回(令和元年度、令和3年度)海外共同研究者らと連携して企画し、座長を行った。平成30年度には日豪連携研究集会を企画し、北海道で開催した。日本、オーストラリア、台湾の研究者を中心に、貴重な情報交換、研究交流の場となった。これらの国際研究集会で共同研究について成果発表し、内容を欧文論文にまとめて国際誌 Journal of Dynamics and Differential Equations, 及び SIAM Journal of Applied Dynamical Systems から公刊した。

研究成果の概要(英文)：By combining geometric singular perturbation techniques and an action functional approach, we analyzed localized solutions in a singularly perturbed three-component FitzHugh-Nagumo model. First, we derived criteria for the existence and stability of pinned pulse solutions in spatially heterogeneous media of a jump type and a bump type. We explicitly computed the pinning distance of a localized solution to the defect. Next we extended our action functional approach to the problem of traveling pulse solutions, in which we derived explicit conditions for their existence to determine the pulse width and propagating speed. We also deduced a necessary condition for the existence of traveling 2-pulse solutions and discussed about a saddle-node and Hopf bifurcations. All the results obtained from theoretical analyses were numerically confirmed.

研究分野：応用数学

キーワード：反応拡散系 変分法 数値解析

1. 研究開始当初の背景

2変数双安定反応拡散系について、西浦と三村らは活性因子の拡散が遅く、反応が速い場合に出現する空間局在解、フロント解やパルス解の存在と安定性を解析する特異極限における手法(SLEP法)を展開した[引用文献]。その後、池田らを中心に接合漸近展開を用いた解析的研究が進み、分岐やダイナミクスを調べる強力な解析的手法となった[引用文献]。双安定系は局在解の形状が具体的に得られる場合もあり、また数学的にも力学系理論が縦横に活躍する場として発展してきた。海外では、米国のJonesらによって確立された幾何学的特異摂動論を用いた解析手法が発展し、オランダのDoelmanらは、3変数反応拡散系の特異極限における解を構成し、反応拡散系の定常問題に対する力学系についてのメルニコフ積分から存在条件を示した[引用文献]。解の安定性は、固有値問題からエバンス関数と呼ぶ解析的関数を構成し、その零点との対応から調べた。その後、空間的な摂動として、モデル方程式系のパラメータに空間依存性を導入し、不均質な媒体上(ヘテロ環境)における空間局在解の存在と安定性の研究へと展開している。日本でも、3変数反応拡散系の空間局在解の問題について、2変数系で確立された接合漸近展開、及び特異極限での固有値問題を組み合わせた基礎的研究を中心に進展しており、本申請課題を国際的に展開する好機であると確信するに至った。

一方、反応拡散系のパルス解についての定常問題は、ハミルトン力学系におけるホモクリニック軌道の問題に対応づけることができる。台湾の陳らは、2変数FitzHugh-Nagumo型の反応拡散系について作用汎関数(action functional)を構成し、そのエネルギー極小解として、パルス解の存在とその安定性を変分法的アプローチによって示した[引用文献]。つまり、パルス解の存在と安定性についての情報が、エネルギーの形状から得られる。しかし、その証明におけるパルス解の形状は区分線形で表されており、 H^1 クラスの条件を満たす解が存在することは厳密に示されたが、安定性を含めて実際に観察される解と比較、検証可能な結果ではない。そこで、申請者はオーストラリアのvan Heijsterらと連携し、3変数FitzHugh-Nagumo型の反応拡散系について作用汎関数を構成し、幾何学的摂動論から得られた解の形状を用いてエネルギーの第1変分と第2変分を具体的に求めた。その主要項間の釣り合いから得られた、解の存在と安定性についての条件式は、Doelmanらのメルニコフ積分とエバンス関数の計算から得られた結果を完全に再現した。空間均一な媒体における定常パルス解に対する結果を欧文論文[引用文献]をまとめる段階において、この変分法的アプローチを、本研究課題である不均一な媒体中の問題に展開する計画を着想した。

2. 研究の目的

不均一媒体(ヘテロ環境)における空間局在解、特にヘテロ環境に特有なデフェクト解について、変分法的アプローチから、解の存在、安定性、分岐を数理的に明らかにすることである。海外共同研究者らと連携し、数学的に設定する問題の実在性と有用性を、数値的に確認しながら相補的に取り組む。具体的には、3変数FitzHugh-Nagumo型の反応拡散系について作用汎関数を構成し、幾何学的摂動論から得られたデフェクト解の形状を用いて汎関数を具体的に評価する。空間局在解のパルスダイナミクスの導出を目指し、動的な局在解である進行波解を変分法の枠組みで記述する。

3. 研究の方法

[引用文献]で示した変分法に基づく方法論を、不均質性をもつ反応拡散系に現れるデフェクト解の問題について、海外共同研究者らと相補的な研究協力関係を構築し、継続的な国際ネットワークを強めていく。3変数 FitzHugh-Nagumo 型反応拡散系を用いて、数学的、及び数値的な以下の2課題を設定して研究を進める。

(1) ジャンプ型の不均質性を持つ3変数 FitzHugh-Nagumo 型反応拡散系におけるデフェクト解の変分法的アプローチによる数学解析、及び数値解析

[引用文献]で示した、空間均一な系での定常パルス解に対する作用汎関数を空間不均質な系での定常デフェクト解の問題へ拡張する。具体的には、ジャンプ点からのパルス位置を求めるため、特異摂動解を高次項まで計算して、作用汎関数の形状を評価する。数学解析結果の数値的検証のため、解析的に得られた特異摂動解と定量的に比較可能な数値近似解の構成を目指す。

(2) 3変数 FitzHugh-Nagumo 型反応拡散系における進行パルス解の変分法的アプローチによる数学解析、及び数値解析

[引用文献]で示した、定常パルス解に対する作用汎関数を進行パルス解の問題へ拡張する。具体的には、指数関数型重み付きのクラスの条件を満たす解として、進行パルス解の存在を作用汎関数の制限付き最小化問題として定式化する。パルス幅に加えて進行速度を定める条件を導出し、解析的に得られた特異摂動解と定量的に比較可能な数値近似解の構成を目指す。

海外共同研究者である van Heijster 博士は数学解析、特に、幾何学的摂動論手法の専門家である。また、陳兆年教授の協力を得て、作用汎関数を構成し、それをヘテロ環境の問題へ拡張する。申請者は、具体的な3変数反応拡散系について、これらの数学解析、及びその数学的結果を数値計算によって相補的に検証する。国際研究集会、短期滞在など、日本、オーストラリア、台湾の3カ国の研究者が年1回程度、直接会う機会を設ける。

4. 研究成果

米国ユタ州で隔年開催される国際研究会議 SIAM Conference on Applications of Dynamical Systems のミニシンポジウムに、平成29年5月(DS17)、令和元年5月(DS19)、令和3年5月(DS21)の3回参加し、研究成果発表を行った。特に、令和元年度の会議ではミニシンポジウム「Recent Developments in Dynamics of Localized Patterns」、令和3年度の会議では、ミニシンポジウム「Traveling Waves in Reaction-Diffusion Equations」を海外研究者の van Heijster 博士と企画し、座長を行った。日本、オーストラリア、台湾の研究者を中心に、合計12演題が講演され、貴重な情報交換、及び国際的な研究交流の場となった。平成30年7月には、北海道美瑛町において、力学系理論の応用に関する日豪国際連携集会「第2回 Joint Australia-Japan Workshop on Applications of Dynamical Systems in Life Sciences」を企画し、北海道大学栄教授らと共同で組織運営した。この連携集会の1回目をオーストラリアで平成28年に開催しており、第2回を日本で開催することで、両国を中心とした国際共同研究ネットワークを強化することが目的である。3日間で22名の参加者があり、14演題が講演された。3回目を令和2年度開催に向けて企画中に、新型コロナウイルスの感染拡大が始まって中断することとなっ

た。オーストラリア、台湾の研究者と連携関係を構築し始めたところで、本研究課題の研究期間が終了したことは残念でならない。令和3年度の国際研究集会では、ミニシンポジウム企画をオンラインで実施することで、継続的な関係維持に努力している。その他、平成30年6月に米国カリフォルニア州で開催された SIAM Conference on Nonlinear Waves and Coherent Structures、及び令和元年7月にオランダライデンで開催された Equadiff 19 のミニシンポジウムで講演し、海外共同研究者と現地で直接会って研究課題について議論し、成果発表してきた。

- (1) ジャンプ型の空間不均一媒体中で定常デフェクト解について、ジャンプ点に接する位置にある解と、ジャンプ点から一定の距離を保つ位置に出現する解があることを数値シミュレーション、及び数値解析から明らかにし、大域的な分岐構造を詳細に調べた。前者のタイプの解をグローバルデフェクト、後者をローカルデフェクトと名付け、それぞれ特異摂動解を構成した。グローバルデフェクト解の位置はジャンプ点に固定されているので、特異摂動解の形状は、パルス幅を作用汎関数の $O(1)$ の項までの計算から求めることで構成される。一方、ローカルデフェクト解はパルス幅に加え、ジャンプ点からの距離についての情報も必要であり、高次項の計算が必要であった。グローバルデフェクト解の存在と安定性については、従来のメルニコフ積分によって得られた先行研究[引用文献]の結果を再現した。ローカルデフェクト解については、本研究課題の変分法アプローチによって初めて詳細に解析され、グローバルデフェクト解との大域的な関係も明らかとなった。数学解析で得られた結果を、大規模な数値解析によって定量的に検証し、これらの結果を欧文論文としてまとめ、Journal of Dynamics and Differential Equations より公刊した[引用文献]。

この特異摂動論と変分法を組み合わせたアプローチを、バンプ型の空間不均一媒体中で定常デフェクト解の存在と安定性の問題に応用した。この問題では、バンプ内側(2つのジャンプ点間内部領域)でのローカルデフェクト解の位置に着目した。先行研究[引用文献]の数値シミュレーションでは、バンプの中心からずれた位置にある解の存在を示唆していたが、この予測に疑問を持ったことが本研究課題に取り組む契機であった。本研究課題で整えた方法論によって詳細に解析したところ、先行研究で考察されたパラメータ条件(1つ活性因子と2つ抑制因子、抑制パラメータの符号を共に正とする)では、空間対称性を保ち、バンプ中心に位置する解のみが安定に存在し、空間対称性を破る解があれば不安定であることが明らかとなった。そして、パラメータの符号を変えた場合には、空間対称性を破る解が安定となる条件も示した。これらの結果を欧文論文としてまとめ、Advanced studied in Pure Mathematics より公刊した[引用文献]。

- (2) [引用文献]及び課題1[引用文献]で取り組んだ問題は、定常パルス解の存在と安定性であり、モデル方程式の時定数パラメータは $O(1)$ の大きさを仮定していた。課題2は、時定数パラメータが $O(\epsilon^{-2})$ の領域で出現する進行パルス解の存在と安定性の問題である。定常パルス解に対する作用汎関数を拡張し、進行パルス解を指数関数型重み付きのクラスの条件を満たす特異摂動解を構成した。作用汎関数の制限付き最小化問題と定式化して、パルス幅に加え、パルス進行速度を定める条件式を変分法的アプローチによって導出した。同じ結果を自由境界問題に縮約する方法論[引用文献]の計算からも確認した。数学解析で得られた結果を検証する数値解析において、連結したパルス形状を保ちながら一定速度で進む解(連結進行パルス解)が見つかった。さらに、連結数が異なるパルス解のサドルノード点が階層的に並ぶ、大域的な分岐構造を確認した。安定な

連結パルス解は、従来よく研究された2変数双安定反応拡散系では見られず、3変数以上の反応拡散系特有の問題である。本研究課題において2連結進行パルス解を特異摂動論で構成し、変分法的アプローチからその存在と安定性についての条件を導出した。N連結進行パルス解 ($N \geq 3$) についても同様の計算を展開できることを示し、これらの結果を欧文論文としてまとめ、SIAM Journal on Applied Dynamical Systemsより公刊した [引用文献]。作用汎関数を拡張する方法論によって、空間高次元球対称スポット解の問題にも取り組んだ。

<引用文献>

- Nishiura, Mimura, SIAM J. Appl. Math. 49 (1989) pp.481–514.
Ikeda, Ikeda, J. Dyn. Diff. Eqn. 12 (2000) pp.117-164–115.
Doelman, van Heijster, Kaper, J. Dyn. Diff. Eqn. 21 (2009) pp.73–115.
Chen, Choi, Arch. Rational Mech. Anal. 206 (2012) pp.741–777.
van Heijster, Chen, Nishiura, Teramoto, J. Dyn. Diff. Eqn. 30 (2018) pp.521–555.
van Heijster, Doelman, Kaper, Nishiura, Ueda, Nonlinearity 24 (2011) pp.127–157.
van Heijster, Chen, Nishiura, Teramoto, J. Dyn. Diff. Eqn. 31 (2019) pp.153–203.
van Heijster, Teramoto, Adv. Stud. Pure Math. 85 (2020) pp.137–150.
Nishi, Nishiura, Teramoto, Physica D 398 (2019) pp.183–207.
Teramoto, van Heijster, SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 20 (2021) pp.371–402.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 4件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Takashi Teramoto, Peter van Heijster	4. 巻 20
2. 論文標題 Traveling pulse solutions in a three-component FitzHugh-Nagumo model	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Applied Dynamical Systems	6. 最初と最後の頁 371-402
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1137/20M1334942	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Peter van Heijster, Takashi Teramoto	4. 巻 85
2. 論文標題 Pinned pulse solutions in a FitzHugh-Nagumo model with bump-type heterogeneity	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advances Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 137-150
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/aspm/08510000	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Kei Nishi, Yasumasa Nishiura, Takashi Teramoto	4. 巻 398
2. 論文標題 Reduction approach to the dynamics of interacting front solutions in a bistable reaction-diffusion system and its application to heterogeneous media	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Physica D	6. 最初と最後の頁 183-207
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.physd.2019.03.009	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Yutaro Hirai, Edgar Avalos, Takashi Teramoto, Yasumasa Nishiura, Hiroshi Yabu	4. 巻 4
2. 論文標題 Ashura Particles: Experimental and Theoretical Approaches for Creating Phase-Separated Structures of Ternary Blended Polymers in Three-Dimensionally Confined Spaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 ACS Omega	6. 最初と最後の頁 13106
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1021/acsomega.9b00991	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Peter van Heijster, Chao-Nien Chen, Yasumasa Nishiura and Takashi Teramoto	4. 巻 31
2. 論文標題 Pinned solutions in a heterogeneous three-component FitzHugh-Nagumo model	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Dynamics and Differential Equations	6. 最初と最後の頁 153-203
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10884-018-9694-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Peter van Heijster, Chao-Nien Chen, Yasumasa Nishiura and Takashi Teramoto	4. 巻 30
2. 論文標題 Localized Patterns in a Three-Component FitzHugh-Nagumo Model Revisited Via an Action Functional	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Dynamics and Differential Equations	6. 最初と最後の頁 521-555
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10884-016-9557-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計12件 (うち招待講演 7件 / うち国際学会 7件)

1. 発表者名 Takashi Teramoto
2. 発表標題 Traveling two pulse solutions in a three-component FitzHugh-Nagumo model
3. 学会等名 日本数学会 2021 年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takashi Teramoto
2. 発表標題 Localized Solutions on Curved Surfaces in Reaction-Diffusion Systems
3. 学会等名 SIAM Conference on Applications of Dynamical Systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takashi Teramoto
2. 発表標題 Localized solutions in a three-component FitzHugh-Nagumo model
3. 学会等名 Equadiff19 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 寺本 敬, Peter van Heijster
2. 発表標題 Pinned pulse solutions inside a bump type heterogeneity
3. 学会等名 日本数学会2020年度年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takashi Teramoto
2. 発表標題 Localized solutions in a FitzHugh-Nagumo type model via an action functional approach
3. 学会等名 RIMS Symposia「Qualitative Theory on Nonlinear Partial Differential Equations」(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 寺本 敬
2. 発表標題 Localized solutions in a FitzHugh-Nagumo type model via an action functional approach
3. 学会等名 研究集会「非線形偏微分方程式の理論と応用」(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takashi Teramoto, Peter van Heijster, Chao-Nien Chen, Yasumasa Nishiura
2. 発表標題 An action functional approach to localized patterns and its application to the spatial heterogeneity
3. 学会等名 SIAM Conference on Nonlinear Waves and Coherent Structures 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takashi Teramoto, Kei Nishi, Yasumasa Nishiura
2. 発表標題 Dynamics of Interacting front solutions in a singular perturbed bistable system
3. 学会等名 SIAM Conference on Nonlinear Waves and Coherent Structures 2018 (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 西慧、西浦廉政、寺本敬
2. 発表標題 ジャンプ型非一様性をもつ 3 種反応拡散方程式における双安定パルス解 のダイナミクス
3. 学会等名 日本数学会2019年度年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 寺本敬, Peter van Heijster, Chao-Nien Chen, 西浦廉政
2. 発表標題 An action functional approach to localized patterns in a three-component FitzHugh-Nagumo model
3. 学会等名 日本数学会 2017 年度秋季総合分科会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takashi Teramoto
2. 発表標題 Localized solutions in reaction-diffusion systems on curved surface
3. 学会等名 Workshop on Dynamical Systems and Applied Mathematics, National Tsing-Hua University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takashi Teramoto
2. 発表標題 Complex Dynamics of Robust Pulse Generators in Reaction-Diffusion Systems
3. 学会等名 2017 SIAM Conference on Applications of Dynamical Systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

力学系理論の応用に関する日豪研究集会 https://sites.google.com/view/australia-japan-ws-dsals2/home

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計3件

国際研究集会 2nd Joint Australia-Japan workshop on dynamical systems with applications in life science	開催年 2018年～2018年
国際研究集会 One-day Workshop on Reaction-Diffusion Equations at Asahikawa 2	開催年 2017年～2017年

国際研究集会 Satellite workshop of JSMB in 2017: Patterns and dynamics with nonlocal effect	開催年 2017年～2017年
--	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
オーストラリア	Queensland University of Technology			
オランダ	Wageningen University & Research			
その他の国・地域（台湾）	National Tsing-Hua Univeristy			